

1 作业题

问题 1.1. 假设现在 6 个月即期年利率为 10% (连续复利, 下同), 1 年期即期利率为 12%, 6 个月到 1 年的远期利率为 11%。问应如何进行套利?



解. 设现在时刻为 $t = 0$, $T = 0.5$, $T^* = 1$, T 时刻到期的即期利率为 $r = 10\%$, T^* 时刻到期的即期利率为 $r^* = 12\%$, T 到 T^* 期间的远期利率记为 $\bar{r}$ 。则

$$e^{r^*T^*} = e^{rT} e^{\bar{r}(T^*-T)},$$

即

$$\bar{r} = \frac{r^*T^* - rT}{T^* - T} = \frac{0.12 \times 1 - 0.10 \times 0.5}{1 - 0.5} = 14\%.$$

而市场给出的 6 个月到 1 年远期利率为 $11\% < 14\%$, 说明 **远期借款利率偏低**, 因此应作为远期借款方进行套利。

我们构造的套利组合具体如下:

- (1) 在 $t = 0$ 借入 6 个月资金 1, 并将其用于买入 $e^{0.07}$ 份 1 年零息债券;
- (2) 同时签订一份从 $T = 0.5$ 到 $T^* = 1$ 的远期借款协议, 锁定借款利率 11%、名义本金 1。

- $t = 0$:

$$+P(0, 0.5) - e^{0.07}P(0, 1) = e^{-0.05} - e^{0.07}e^{-0.12} = 0,$$

- $t = 0.5$: 偿还 (1) 中的 6 个月借款 1; 同时按远期协议借入 1, 净现金流为 0。
- $t = 1$: 1 年零息债券到期收入 $e^{0.07}$; 偿还远期借款本息 $e^{0.11(1-0.5)} = e^{0.055}$,

$$\Pi_{t=1} = e^{0.07} - e^{0.055} > 0.$$

因此可获得确定性正收益, 存在套利机会。每单位名义本金在 $t = 1$ 的无风险利润为

$$e^{0.07} - e^{0.055} \approx 0.0159.$$

□