

1 作业题

问题 1.1. 对于两个具有相同到期日的欧式看涨期权，当 $K_1 > K_2$ 时，有

$$c_t(K_2) - c_t(K_1) \leq K_1 - K_2.$$



解. 构造两个组合：

- 组合 A：一份执行价格为 K_2 的欧式看涨期权，加上一笔到期价值为 K_2 的现金；
- 组合 B：一份执行价格为 K_1 的欧式看涨期权，加上一笔到期价值为 K_1 的现金。

到期时，两个组合的价值分别为

$$V_A(T) = (S_T - K_2)^+ + K_2, \quad V_B(T) = (S_T - K_1)^+ + K_1.$$

下面分情况比较两个组合的到期价值：

$$\begin{cases} S_T \leq K_2 : & V_A(T) = K_2 < K_1 = V_B(T), \\ K_2 < S_T \leq K_1 : & V_A(T) = S_T \leq K_1 = V_B(T), \\ S_T > K_1 : & V_A(T) = S_T = V_B(T). \end{cases}$$

所以在任何状态下都有 $V_A(T) \leq V_B(T)$ 。

由无套利原则，组合 A 的当前价值不能高于组合 B 的当前价值，即

$$c_t(K_2) + K_2 e^{-r(T-t)} \leq c_t(K_1) + K_1 e^{-r(T-t)}.$$

移项得

$$c_t(K_2) - c_t(K_1) \leq (K_1 - K_2) e^{-r(T-t)}.$$

若无风险利率非负，则 $e^{-r(T-t)} \leq 1$ ，于是

$$c_t(K_2) - c_t(K_1) \leq (K_1 - K_2) e^{-r(T-t)} \leq K_1 - K_2.$$

所以原不等式成立。

□