

1 作业题

问题 1.1. 某股票价格为 90 美元，利用三步二叉树计算期权价格：

(a) 9 个月期限、执行价格为 93 美元的美式看涨期权；

(b) 9 个月期限、执行价格为 93 美元的美式看跌期权。

波动率为 28%，无风险利率（所有期限）为 3%（连续复利）。取

$$\Delta t = 3 \text{ 个月} = 0.25 \text{ 年}.$$

解. 设 $S_0 = 90$, $K = 93$, $\sigma = 28\%$, $r = 3\%$, $T = 0.75$ 。有

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.28\sqrt{0.25}} \approx 1.1503, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \approx 0.8694.$$

 注. 这里没有给出具体的 u 和 d , 则按 $ud = 1$ 并结合给出的波动率来计算.

风险中性测度为

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.03 \times 0.25} - 0.8694}{1.1503 - 0.8694} \approx 0.4919,$$

每一步的贴现因子为

$$e^{-r\Delta t} = e^{-0.03 \times 0.25} \approx 0.9925.$$

在到期日，看涨期权和看跌期权价值分别为

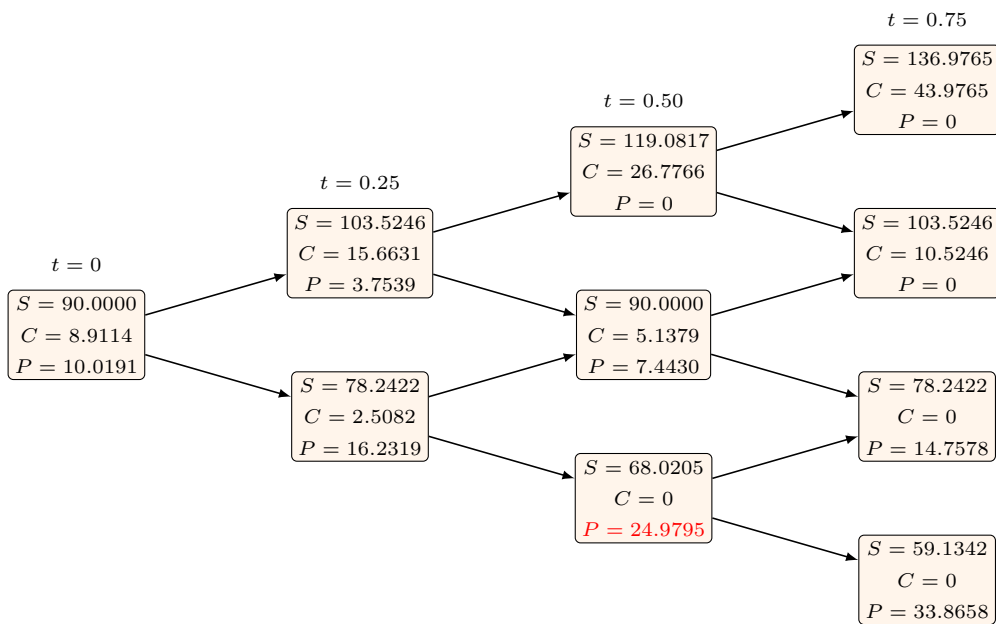
$$C_T = (S_T - K)^+, \quad P_T = (K - S_T)^+.$$

我们利用三步二叉树来从到期日反推各点的美式看涨期权价值 C 和看跌期权价值 P ：

$$C = \max \{S - K, e^{-r\Delta t} [pC_u + (1 - p)C_d]\},$$

$$P = \max \{K - S, e^{-r\Delta t} [pP_u + (1 - p)P_d]\}.$$

最终我们得到了下图：



在具体计算中，美式看涨期权在各节点的继续持有价值都不低于立即执行价值，即对于任意节点都有： $C > S - K$ 。最终我们计算得到的初始价格为

$$C_0 \approx 8.9114 \text{ 美元}.$$

对于美式看跌期权，在 $t = 0.50$ 且 $S = 68.0205$ 的节点，立即执行价值为 $93 - 68.0205 = 24.9795$ ，而继续持有价值为：

$$e^{-r\Delta t} [pP_u + (1 - p)P_d] = 0.9925(0.4919 \times 14.7578 + (1 - 0.4919) \times 33.8658) = 24.2846 < 24.9795$$

故在该节点应提前执行，取 $P = 24.9795$ 。最终我们倒推到初始节点得到

$$P_0 \approx 10.0191 \text{ 美元}.$$

□