

作业

杨锐 2313878

November 5, 2025

问题. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个概率空间, X 为可积随机变量 ($\mathbb{E}[|X|] < \infty$), 且 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ -代数, 满足 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$. 证明:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_2] | \mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1] \quad (\text{a.s.}). \quad (1)$$

证明. 我们从条件期望的定义出发, 回忆任意子 σ -代数 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 及可积随机变量 X 的条件期望 $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ 的定义, 对于 $\mathcal{G}$ -可测随机变量 Y , 满足

$$\forall A \in \mathcal{G}, \quad \int_A Y dP = \int_A X dP.$$

我们记

$$Y_2 := \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_2].$$

由定义, Y_2 是 $\mathcal{G}_2$ -可测的, 且对任意 $B \in \mathcal{G}_2$,

$$\int_B Y_2 dP = \int_B X dP. \quad (2)$$

再定义

$$Z := \mathbb{E}[Y_2 | \mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_2] | \mathcal{G}_1].$$

Z 是 $\mathcal{G}_1$ -可测的, 且对任意 $A \in \mathcal{G}_1$,

$$\int_A Z dP = \int_A Y_2 dP. \quad (3)$$

我们的目标是证明 $Z = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1]$ (a.s.). 为此, 只需验证 Z 满足 $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1]$ 的定义方程, 即:

$$\forall A \in \mathcal{G}_1, \quad \int_A Z dP = \int_A X dP. \quad (4)$$

任取 $A \in \mathcal{G}_1$. 由于 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, 有 $A \in \mathcal{G}_2$. 于是由 (2) 得

$$\int_A Y_2 dP = \int_A X dP. \quad (5)$$

再由 (3),

$$\int_A Z dP = \int_A Y_2 dP.$$

联立 (5) 与 (3), 得

$$\int_A Z dP = \int_A Y_2 dP = \int_A X dP.$$

故 (4) 对任意 $A \in \mathcal{G}_1$ 成立. 又因 $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_1]$ 是 $\mathcal{G}_1$ -可测的, 且唯一 (a.s.) 满足上述积分等式 [1, Theorem 34.4], [2, Proposition 6.5], 而 Z 也是 $\mathcal{G}_1$ -可测且满足相同方程, 故

$$Z = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_1] \quad (\text{a.s.}).$$

即

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_2] \mid \mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_1] \quad (\text{a.s.}).$$

此结论即条件期望为 **tower property** [3, Section 4.1.4]. □

参考文献

- [1] P. Billingsley, *Probability and Measure*, 3rd ed., Wiley, 1995, § 34, Theorems 34.3 and 34.4.
- [2] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, 2nd ed., Springer, 2002, Chapter 6, Proposition 6.5.
- [3] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, 5th ed., Cambridge University Press, 2019, Section 4.1.4.