

作业

杨锐 2313878

November 30, 2025

问题 (1). 设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 是一维标准布朗运动, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 是它的自然过滤。则下列过程是 $\mathcal{F}_t$ -鞅:

1. B_t ,
2. $B_t^2 - t$,
3. $M_t^a = \exp\left(aB_t - \frac{a^2}{2}t\right)$, $a \in \mathbb{R}$ 。

证明.

1. B_t 是鞅

由于 $B_t \sim N(0, t)$, 故:

$$E[|B_t|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 2 \int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

令 $u = \frac{x^2}{2t}$, 则 $du = \frac{x}{t} dx$, 可得:

$$E[|B_t|] = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \frac{t}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty$$

对任意 $0 \leq s < t$, 我们将 B_t 分解为:

$$B_t = (B_t - B_s) + B_s$$

由布朗运动的独立增量性, $B_t - B_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立, 且 $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ 。因此:

$$\begin{aligned} E[B_t | \mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s) + B_s | \mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] + E[B_s | \mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s] + B_s \\ &= 0 + B_s = B_s \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

综上, B_t 满足鞅的定义条件。

注. 若 X 关于 $\mathcal{G}$ 可测, 则 $E[X | \mathcal{G}] = X$ 。一般的, 若 Y 是 $\mathcal{G}$ -可测且 XY 可积, 则 $E[XY | \mathcal{G}] = YE[X | \mathcal{G}]$ 。故我们有:

♡ 由 B_s 关于 $\mathcal{F}_s$ 可测, 我们可得: $E[B_s | \mathcal{F}_s] = B_s$

♡ 由布朗运动的独立增量性, $B_t - B_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立, 我们可得: $E[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s]$

2. $B_t^2 - t$ 是鞅

由于 $B_t \sim N(0, t)$, 故:

$$E[|B_t^2 - t|] \leq E[B_t^2] + t = t + t = 2t < \infty$$

对任意 $0 \leq s < t$, 我们将 B_t 表示为:

$$B_t = (B_t - B_s) + B_s$$

$$B_t^2 = (B_t - B_s + B_s)^2 = (B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2$$

取条件期望:

$$\begin{aligned} E[B_t^2 | \mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s] + E[2B_s(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s] + E[B_s^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= E[(B_t - B_s)^2] + 2B_s E[B_t - B_s] + B_s^2 \\ &= (t - s) + 2B_s \cdot 0 + B_s^2 = B_s^2 + (t - s) \end{aligned}$$

注. $\heartsuit E[(B_t - B_s)^2] = \text{Var}(B_t - B_s) - (E[B_t - B_s])^2 = \text{Var}(B_t - B_s) = t - s$

因此:

$$\begin{aligned} E[B_t^2 - t | \mathcal{F}_s] &= E[B_t^2 | \mathcal{F}_s] - t \\ &= [B_s^2 + (t - s)] - t = B_s^2 - s \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

这正是 $X_s = B_s^2 - s$, 故 $B_t^2 - t$ 是鞅。

3. $M_t^a = \exp\left(aB_t - \frac{a^2}{2}t\right)$ 是鞅

由于 $B_t \sim N(0, t)$, 故:

$$\begin{aligned} E[|M_t^a|] &= E\left[\exp\left(aB_t - \frac{a^2}{2}t\right)\right] \\ &= e^{-\frac{a^2}{2}t} E[e^{aB_t}] = e^{-\frac{a^2}{2}t} \cdot e^{\frac{a^2}{2}t} = 1 < \infty \end{aligned}$$

注. 利用正态分布的矩母函数公式: 若 $X \sim N(0, \sigma^2)$, 则 $E[e^{aX}] = e^{\frac{a^2\sigma^2}{2}}$ 。这里 $B_t \sim N(0, t)$, 故:

$$E[e^{aB_t}] = e^{\frac{a^2 t}{2}}$$

对任意 $0 \leq s < t$, 我们将 M_t^a 重写为:

$$\begin{aligned} M_t^a &= \exp\left(aB_t - \frac{a^2}{2}t\right) \\ &= \exp\left(a(B_t - B_s) + aB_s - \frac{a^2}{2}t\right) = \exp\left(aB_s - \frac{a^2}{2}t\right) \cdot \exp(a(B_t - B_s)) \end{aligned}$$

取条件期望:

$$E[M_t^a | \mathcal{F}_s] = \exp\left(aB_s - \frac{a^2}{2}t\right) \cdot E\left[\exp(a(B_t - B_s)) \middle| \mathcal{F}_s\right]$$

由布朗运动的独立增量性, $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ 且与 $\mathcal{F}_s$ 独立, 故:

$$E\left[\exp(a(B_t - B_s)) \middle| \mathcal{F}_s\right] = E[\exp(a(B_t - B_s))]$$

再次利用正态分布的矩母函数公式：

$$E[\exp(a(B_t - B_s))] = \exp\left(\frac{a^2}{2}(t - s)\right)$$

代入得：

$$\begin{aligned} E[M_t^a | \mathcal{F}_s] &= \exp\left(aB_s - \frac{a^2}{2}t\right) \cdot \exp\left(\frac{a^2}{2}(t - s)\right) \\ &= \exp\left(aB_s - \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}t - \frac{a^2}{2}s\right) \\ &= \exp\left(aB_s - \frac{a^2}{2}s\right) = M_s^a \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

因此 M_t^a 是鞅。

□

问题 (2). 设 X 是右连续非负上鞅，则

$$P\left[\sup_t X_t > \lambda\right] \leq \lambda^{-1}E[X_0].$$

证明. 令：

$$T = \inf\{t \geq 0 : X_t > \lambda\},$$

其中 $\inf \emptyset = \infty$ 。由于 X 是右连续过程， T 是停时（实际上如果我们定义开集 $A = \{x : x > \lambda\}$ 则有 T 为关于 A 的**首中时**）。

注. 课上讲的性质：

1. 若 X_t 是 F_t -鞅 ($t \geq 0$)，则 $EX_t = EX_0, \forall t$;
2. 若 X_t 是 F_t -下鞅 ($t \geq 0$)，则 $EX_t \geq EX_s, \forall s \leq t$ 。

实际上如果我们考虑 $Y_t = -X_t$ (X_t 是 F_t -下鞅)，则 Y_t 是 F_t -上鞅 ($t \geq 0$)，那么有 $EY_t = -EX_t \leq -EX_s = EY_s, \forall s \leq t$ 。

那么如果我们考虑停时 $T \wedge n$ ，则对 $\forall s \leq T \wedge n$ 有：

$$E[X_{T \wedge n}] \leq E[X_s] \leq E[X_0].$$

在事件 $\{\sup_{t \leq n} X_t > \lambda\}$ 上，有 $T \leq n$ ，因此 $X_{T \wedge n} = X_T > \lambda$ 。于是：

$$E[X_{T \wedge n}] \geq E[X_{T \wedge n} 1_{\{T \leq n\}}] > \lambda P(T \leq n) = \lambda P\left(\sup_{t \leq n} X_t > \lambda\right).$$

结合两个不等式得：

$$\lambda P\left(\sup_{t \leq n} X_t > \lambda\right) < E[X_{T \wedge n}] \leq E[X_0].$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，由单调有界收敛定理：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda P\left(\sup_{t \leq n} X_t > \lambda\right) \leq \lambda P\left(\sup_{t \geq 0} X_t > \lambda\right) \leq E[X_0],$$

即

$$P\left(\sup_{t \geq 0} X_t > \lambda\right) \leq \lambda^{-1}E[X_0].$$

□