

作业

杨锐 2313878

December 1, 2025

命题. 设 $H, H^{(1)}$ 和 $H^{(2)}$ 是简单过程, α, β 是任意实数, 则

$$(i) (\alpha H^{(1)} + \beta H^{(2)}) \cdot B = \alpha(H^{(1)} \cdot B) + \beta(H^{(2)} \cdot B);$$

(ii) $H \cdot B$ 是连续鞅, 且若 $\int_0^\infty H_s^2 ds < \infty$, 则 $H \cdot B$ 是 L^2 -有界的;

(iii) $(H \cdot B)_t^2 - \int_0^t H_s^2 ds$ 是鞅。

$$(iv) E[(H \cdot B)_t] = 0;$$

$$(v) E[(H \cdot B)_t^2] = E\left[\int_0^t H_s^2 ds\right].$$

证明. 作业是证明 (iii):

(iii) 设 H 是简单过程:

$$H_t = H_{-1}1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} H_i 1_{(t_i, t_{i+1})}(t),$$

其中 $H_{-1} \in \mathcal{F}_0$, $H_i \in \mathcal{F}_{t_i}$, 且一致有界。

我们需要证明过程 $M_t := (H \cdot B)_t^2 - \int_0^t H_s^2 ds$ 是鞅, 即:

- (1) M_t 是适应过程;
- (2) $E[|M_t|] < \infty$ 对任意 $t \geq 0$;
- (3) 对任意 $0 \leq s < t$, 有 $E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ a.s.

♡ **适应性:** 由 (ii), $(H \cdot B)_t$ 是适应过程, 故 $(H \cdot B)_t^2$ 是适应过程。另外,

$$\int_0^t H_s^2 ds = \sum_{i=0}^{n-1} H_i^2(t_{i+1} - t_i) + H_n^2(t - t_n), \quad t_n \leq t < t_{n+1}$$

也是适应过程

注. 这是由于: H_i 是 $\mathcal{F}_{t_i}$ -可测的, 故也是 $\mathcal{F}_t$ -可测的

因此 M_t 是适应过程。

♡ **可积性:** 由于 H_i 有界, 存在 $M > 0$ 使得 $|H_i| \leq M$ a.s., 则

$$E[(H \cdot B)_t^2] = E[(H \cdot B)_t^2] = E\left[\int_0^t H_s^2 ds\right] \leq M^2 t < \infty.$$

另外,

$$E\left[\left|\int_0^t H_s^2 ds\right|\right] = E\left[\int_0^t H_s^2 ds\right] \leq M^2 t < \infty.$$

因此 $E[|M_t|] \leq 2M^2 t < \infty$ 。

♡ 鞅性证明：设 $0 \leq s < t$ ，记

$$\Delta = (H \cdot B)_t - (H \cdot B)_s = \int_s^t H_u dB_u.$$

则

$$(H \cdot B)_t^2 = [(H \cdot B)_s + \Delta]^2 = (H \cdot B)_s^2 + 2(H \cdot B)_s \Delta + \Delta^2.$$

因此

$$M_t - M_s = (H \cdot B)_t^2 - (H \cdot B)_s^2 - \int_s^t H_u^2 du = 2(H \cdot B)_s \Delta + \left(\Delta^2 - \int_s^t H_u^2 du \right).$$

现在计算条件期望 $E[M_t - M_s | \mathcal{F}_s]$ ：

$$E[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] = 2(H \cdot B)_s E[\Delta | \mathcal{F}_s] + E \left[\Delta^2 - \int_s^t H_u^2 du \mid \mathcal{F}_s \right].$$

(a) 第一项：由 (ii)， $H \cdot B$ 是鞅，故 $E[\Delta | \mathcal{F}_s] = E[(H \cdot B)_t - (H \cdot B)_s | \mathcal{F}_s] = 0$ 。

(b) 第二项：需要证明 $E \left[\Delta^2 - \int_s^t H_u^2 du \mid \mathcal{F}_s \right] = 0$ 。

由于 H 是简单过程，设 $s = t_m < t_{m+1} < \cdots < t_n = t$ ，则

$$\Delta = \sum_{i=m}^{n-1} H_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

计算 Δ^2 ：

$$\Delta^2 = \sum_{i=m}^{n-1} H_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 + 2 \sum_{m \leq i < j \leq n-1} H_i H_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

取条件期望：

$$\begin{aligned} E[\Delta^2 | \mathcal{F}_s] &= \sum_{i=m}^{n-1} E[H_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 | \mathcal{F}_s] \\ &\quad + 2 \sum_{m \leq i < j \leq n-1} E[H_i H_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) | \mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

对于交叉项 ($i < j$)：

$$\begin{aligned} &E[H_i H_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) | \mathcal{F}_s] \\ &= E[E[H_i H_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_j}] | \mathcal{F}_s] \\ &= E[H_i H_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) E[B_{t_{j+1}} - B_{t_j} | \mathcal{F}_{t_j}] | \mathcal{F}_s] = 0, \end{aligned}$$

注. 因为 $E[B_{t_{j+1}} - B_{t_j} | \mathcal{F}_{t_j}] = 0$

这是由于布朗运动的鞅性： $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ 关于 $\mathcal{F}_{t_j}$ 独立

对于平方项：

$$\begin{aligned} &E[H_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= E[E[H_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_i}] | \mathcal{F}_s] \\ &= E[H_i^2 E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_i}] | \mathcal{F}_s] \\ &= E[H_i^2 (t_{i+1} - t_i) | \mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

注. 这是由于:

$$\begin{aligned} E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_i}] &= \text{Var}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] - E[B_{t_{i+1}} - B_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]^2 \\ &= \text{Var}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] = t_{i+1} - t_i \end{aligned}$$

因此,

$$E[\Delta^2 | \mathcal{F}_s] = \sum_{i=m}^{n-1} E[H_i^2(t_{i+1} - t_i) | \mathcal{F}_s] = E\left[\sum_{i=m}^{n-1} H_i^2(t_{i+1} - t_i) \middle| \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t H_u^2 du \middle| \mathcal{F}_s\right].$$

于是

$$E\left[\Delta^2 - \int_s^t H_u^2 du \middle| \mathcal{F}_s\right] = 0.$$

综上: $E[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] = 0$, 即 $E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ a.s., 故 M_t 是鞅, 得证.

□