

作业

杨锐 2313878

December 9, 2025

定理 (关于布朗运动的 Itô 公式). 设 $f(t, x)$ 是二元函数, 满足 $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 均存在且连续, 并且 $\frac{\partial f}{\partial x} \in L^2$, 则

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds. \quad (1)$$

或者, 写成微分形式:

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t) dB_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t) dt. \quad (2)$$

命题. 设 $H, H^{(1)}$ 和 $H^{(2)}$ 是简单过程, α, β 是任意实数, 则

$$(i) (\alpha H^{(1)} + \beta H^{(2)}) \cdot B = \alpha(H^{(1)} \cdot B) + \beta(H^{(2)} \cdot B);$$

$$(ii) H \cdot B \text{ 是连续鞅, 且若 } \int_0^\infty H_s^2 ds < \infty, \text{ 则 } H \cdot B \text{ 是 } L^2\text{-有界的};$$

$$(iii) (H \cdot B)_t^2 - \int_0^t H_s^2 ds \text{ 是鞅}.$$

$$(iv) E[(H \cdot B)_t] = 0;$$

$$(v) E[(H \cdot B)_t^2] = E\left[\int_0^t H_s^2 ds\right].$$

问题. 利用 Itô 公式证明: $B_t^2 - t$ 是 $\mathcal{F}_t$ 鞅.

证明. 定义:

$$M_t := B_t^2 - t, \quad t \geq 0$$

考虑函数:

$$f(t, x) = x^2 - t$$

其偏导数为:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2.$$

由(2), 我们可得:

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t)(dB_t)^2$$

由于 $(dB_t)^2 = dt$, 代入得:

$$dM_t = d(B_t^2 - t) = (-1)dt + 2B_t dB_t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dt = 2B_t dB_t$$

因此：

$$M_t = M_0 + \int_0^t 2B_s dB_s$$

其中 $M_0 = B_0^2 - 0 = 0$ 。

由 **命题** (ii)，对适应过程 $H_s, \forall T$ 若：

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T H_s^2 ds \right] < \infty$$

则 Itô 积分 $\int_0^t H_s dB_s$ 是连续平方可积鞅。

取 $H_s = 2B_s$ ，则：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_s^2] &= \mathbb{E}[B_s]^2 = s \\ \mathbb{E} \left[\int_0^T (2B_s)^2 ds \right] &= \int_0^T 4\mathbb{E}[B_s^2] ds = \int_0^T 4s ds = 2T^2 < \infty \end{aligned}$$

故：

$$I_t := \int_0^t 2B_s dB_s$$

是 $(\mathcal{F}_t)$ - 鞅。

而 $M_t = I_t$ ，所以 M_t 也是鞅。

接下来我们来验证一下 M_t 确实是鞅。

♡ 对有限的 t ：

$$\mathbb{E}[|M_t|] \leq \mathbb{E}[B_t^2] + t = 2t < \infty$$

♡ 对任意 $0 \leq s \leq t$ ：

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E} \left[M_s + \int_s^t 2B_u dB_u \mid \mathcal{F}_s \right] = M_s + \mathbb{E} \left[\int_s^t 2B_u dB_u \mid \mathcal{F}_s \right]$$

由 **命题** (iv) 可知：Itô 积分的期望为 0，即上式第二项为零，故：

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad \text{a.s.}$$

故 $M_t = B_t^2 - t$ 是鞅。

□

test test test test test