

作业 1

杨锐 2313878

2025 年 9 月 28 日

问题 (1). 试问：序列 $(2, 2, 2, 2, 1, 1)$ 一定是 6 个顶点的路 P_6 的度序列吗？

证明. 这样的序列不一定是 6 个顶点的路 P_6 的度序列.

由于其中有两个点度为 1，我们不妨记 v_1, v_6 为这两个点，那么其必然各自分别连接一个点：

(1) v_1 与 v_6 各自连接的点不同：我们记 v_1 连接 v_2 ， v_6 连接 v_5 . 由于 $\deg v_2 = \deg v_5 = 2$ ，故其必然各自分别连接一个点：

(i) v_2 与 v_5 各自连接的点不同：我们记 v_2 连接 v_3 ， v_5 连接 v_4 . 由于 $\deg v_3 = \deg v_4 = 2$ ，故其必然各自分别连接一个点，而此时六个顶点都出现了，符合的连接方式只有 v_3 与 v_4 相连，故此是构成一条路： $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6$ ，符合题意.

(ii) v_3 与 v_4 各自连接的点不相同：我们记 v_3 与 v_4 共同连接的点是 v_5 ，则此时

$$\{\deg v_3, \deg v_4, \deg v_5, \deg v_1, \deg v_6\} = \{2, 2, 2, 1, 1\}$$

此时无论剩下的一个点怎么连接都无法使得度序列变为题目要求的 $\{2, 2, 2, 2, 1, 1\}$.

(2) v_1 与 v_6 各自连接的点相同：我们记 v_2 连接 v_1 和 v_6 ，则这三个点的度序列为

$$\{\deg v_1, \deg v_2, \deg v_6\} = \{1, 2, 1\}$$

剩下三个点 v_3, v_4, v_5 构成的度序列由题意应为：

$$\{\deg v_3, \deg v_4, \deg v_5\} = \{2, 2, 2\}$$

这三个点只有可能构成一个三角形. 这样的话，度序列符合题意，另外这样相当于是一条路 P_3 和一个完全图 K_3 ，相当于一个有两个连通分支的图，故不一定是 6 个顶点的路 P_6 的度序列.

□

问题 (2). 证明：连通图的任意两条最长路都有至少一个公共顶点.

反证. 假设两条最长路分别为： P_1, P_2 ，且 P_1, P_2 没有公共顶点. 由于 G 是一个连通图，故存在一条路 Q 使得 Q 分别连接 P_1 中的 v_1 和 P_2 中的点 v_2 . 首先这两个点不是端点，若是端点，则 $L(P_1 \cup Q) \geq L(P_1)$ ($L()$ 表路的长度)，与最长路的设定矛盾！

我们记 v_1 沿 P_1 向两端延伸的最长子路 P'_1 的长度为 l_1 ， v_2 沿 P_2 向两端延伸的最长子路 P'_2 的长度为 l_2 ，则 $l_1 \geq \frac{L(P_1)}{2}, l_2 \geq \frac{L(P_2)}{2}$ ，且 $L(Q) \geq 1$ ，我们考虑路 $P = P'_1 \cup Q \cup P'_2$ ：

$$L(P) = L(P'_1 \cup Q \cup P'_2) = l_1 + l_2 + L(Q) \geq \frac{L(P_1)}{2} + \frac{L(P_2)}{2} + 1$$

(1) $L(P_1) = L(P_2)$, 则: $L(P) \geq L(P_1) + 1 > L(P_1)$ 与最长路的设定矛盾!

(2) $L(P_1) \neq L(P_2)$, 不妨设 $L(P_1) < L(P_2)$ 则: $L(P) \geq \frac{L(P_1)}{2} + \frac{L(P_2)}{2} + 1 > L(P_1) + 1 > L(P_1)$ 与最长路的设定矛盾!

综上: 连通图的任意两条最长路都有至少一个公共顶点. $\square$

问题 (3). 设树 T 有一个顶点的度至少为 k . 求证: 树 T 至少有 k 个叶子.

证明. 设 v_0 是树 T 的一个顶点, 且 $\deg(v_0) \geq k$. 考虑 v_0 的每条邻边 $e_i = v_0 u_i, i = 1, 2, \dots, \deg(v_0)$. 移除 v_0 后, T 分成 $\deg(v_0)$ 棵子树 T_i , 每个 T_i 包含 u_i . 每棵子树 T_i 中, 从 u_i 出发沿任意极长路径, 最终会到达一个叶子 l_i (因为树有限无环, 且除了 v_0 方向外, 其它方向走下去会终止于度数为 1 的顶点). 这些叶子 $l_1, \dots, l_{\deg(v_0)}$ 互不相同, 且都在 T 中. 由于 $\deg(v_0) \geq k$, 所以至少有 k 个不同的叶子. $\square$

问题 (4). 设树 T 恰好有 $2k$ 个奇度顶点. 试问: T 是否一定可以分解为 k 条路 (即此树 T 的边集可以看成是 k 条路的边集的不交并)?

解. 我们先证明一个引理:

引理. 如果一个连通图中每个顶点的度数均为偶数, 那么这个图至少包含一个欧拉回路, 即至少有一条遍历图中每条边一遍的回路.

这个引理是显然的: 由于每个点的度数为偶数, 故我们可以将整个图看成是由若干个环组成的, 又因为环一定能找到一条欧拉回路, 所以整个图能找到一条由若干个欧拉回路并起来的路当然还是欧拉回路.

回到原题

由于树 T 有 $2k$ 个奇度顶点, 我们记为: $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k-1}, v_{2k}\}$. 我们考虑用 k 条新的路将 v_i 与 v_{k+i} 连接起来 ($i = 1, 2, \dots, k$), 这样 v_i 与 v_{k+i} 的度数都加 1, 那么这两个点都变为偶度顶点, 故我们通过这样的操作能将 $v_1, v_2, \dots, v_{2k-1}, v_{2k}$ 都变为偶度顶点, 得到新图 G , 则由引理我们可知 G 是连通图且每个顶点的度数均为偶数, 那么 G 存在一个欧拉回路 P .

而这个欧拉回路包含 $e_1, e_2, \dots, e_k$, 我们把 G 剔除这 k 条边恰好得到的就是我们的树 T . 我们在欧拉回路 P 上剔除这 k 条边, 就相当于把 P 划分成了 k 各部分即得到了我们的 k 条路, 而分解出来的这 k 条路就验证了 T 一定可以分解为 k 条路. $\square$

问题 (5). 证明: 对于任意连通图 G 以及 G 的一个无圈子图 H , 都存在 G 的生成树 T 使得 $H \subseteq T \subseteq G$.

证明. 我们从 H 出发, 逐步添加边, 按照如下步骤构造一个包含 H 的生成树 T :

Step1 设 $F_0 = H$.

Step2 若 F_i 不包含 G 的所有顶点, 则由于 G 连通, 存在一条边 $e = uv \in E(G)$, 其中 $u \in V(F_i)$, $v \notin V(F_i)$. 将 e 加入 F_i 得到 F_{i+1} . 因为 v 不在 F_i 中, 加入 e 不会形成环.

Step3 若 F_i 包含所有顶点但不连通, 则由于 G 连通, 存在边 e 连接 F_i 的两个不同连通分支. 将 e 加入 F_i 得到 F_{i+1} . 因为 e 连接两个不同分支, 不会形成环.

Step4 重复上述步骤, 直到 F_m 连通且包含所有顶点. 此时 F_m 是 G 的生成树, 且 $H \subseteq F_m$.

这样我们便得到了生成树 T 使得 $H \subseteq T \subseteq G$.

□