

作业一

杨锐 2313878

2025 年 11 月 5 日

问题. 两种面值 1000 元的债券在相同时期之末按票面偿还, 票息每年末支付一次, 剩余期限为整周期, 现在购买它们都可得到 2% 的年收益率。第一种债券的票息率为 2.5%, 目前售价为 1136.78 元, 第二种债券的票息率为 1.25%, 求第二种债券的价格。(按复利计算)

证明.

(i) 确定剩余期限 n

第一种债券: 面值 $F = 1000$, 年收益率为 $r = 0.02$, 票息 $C_1 = F \times 0.025 = 25$, 现价 $P_1 = 1136.78$ 。由债券现值公式我们可知:

$$P_1 = \sum_{t=1}^n \frac{C_1}{(1+r)^t} + \frac{F}{(1+r)^n}$$

代入可得:

$$1136.78 = C_1 \times \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} + F \times (1+r)^{-n}$$

$$1136.78 = 25 \times \frac{1 - (1.02)^{-n}}{0.02} + 1000 \times (1.02)^{-n}$$

$$1136.78 = 1250 \times (1 - (1.02)^{-n}) + 1000 \times (1.02)^{-n}$$

令 $X = (1.02)^{-n}$, 则:

$$1136.78 = 1250 - 1250X + 1000X$$

$$250X = 1250 - 1136.78$$

$$250X = 113.22$$

$$X = (1.02)^{-n} = \frac{113.22}{250} = 0.45288$$

则

$$n = -\log_{1.02}(0.45288) = -\frac{\ln 0.45288}{\ln 1.02} \approx 40.00499$$

即我们可得剩余期限为 $n \approx 40$ 年。

(ii) 第二种债券的价格 P_2

第二种债券: 面值 $F = 1000$, 票面利率 $c_2 = 0.0125$, 年收益率 $r = 0.02$, 期限 $n = 40$, 票息 $C_2 = F \times c_2 = 1000 \times 0.0125 = 12.5$ 元。

第二种债券的价格 P_2 为:

$$P_2 = \sum_{t=1}^{40} \frac{C_2}{(1.02)^t} + \frac{F}{(1.02)^{40}}$$

$$P_2 = C_2 \times \frac{1 - (1.02)^{-40}}{0.02} + F \times (1.02)^{-40}$$

代入已知值 $(1.02)^{-40} = 0.45288$:

$$P_2 = 12.5 \times \frac{1 - 0.45288}{0.02} + 1000 \times 0.45288$$

$$P_2 = 12.5 \times \frac{0.54712}{0.02} + 452.88$$

$$P_2 = 12.5 \times 27.356 + 452.88$$

$$P_2 = 341.95 + 452.88$$

$$P_2 = 794.83 \text{ 元}$$

综上所述我们可得第二种债券的价格为 $P_2 \approx 794.83$ 元。

□