

作业二

杨锐 2313878

2025 年 11 月 18 日

问题.

$$\min \sigma_p^2 = x^T V x \quad \text{s.t.} \quad x^T e = 1$$

求满足上述优化问题的 x , $x^T R$, σ_p^2 .

解. 我们令:

$$\mathcal{L} = x^T V x - \lambda(x^T e - 1)$$

求偏导并令其为零:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2Vx - \lambda e = 0 \quad \Rightarrow \quad Vx = \frac{\lambda}{2} e$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 - x^T e = 0$$

由 $Vx = \frac{\lambda}{2} e$ 可得:

$$x = \frac{\lambda}{2} V^{-1} e$$

代入约束条件 $x^T e = 1$:

$$\left(\frac{\lambda}{2} V^{-1} e \right)^T e = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{2} e^T V^{-1} e = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{e^T V^{-1} e}$$

因此最优解 x 为:

$$x = \frac{V^{-1} e}{e^T V^{-1} e}$$

对应的期望收益 $x^T R$ 为:

$$x^T R = \frac{e^T V^{-1} R}{e^T V^{-1} e}$$

最小方差 σ_p^2 为:

$$\sigma_p^2 = x^T V x = \frac{e^T V^{-1} V V^{-1} e}{(e^T V^{-1} e)^2} = \frac{e^T V^{-1} e}{(e^T V^{-1} e)^2} = \frac{1}{e^T V^{-1} e}$$

综上:

$$\boxed{x = \frac{V^{-1} e}{e^T V^{-1} e}} \quad , \quad \boxed{x^T R = \frac{e^T V^{-1} R}{e^T V^{-1} e}} \quad , \quad \boxed{\sigma_p^2 = \frac{1}{e^T V^{-1} e}}$$

□