

作业三

杨锐 2313878

2025 年 11 月 18 日

问题. 已知两个风险证券 A、B 的相关数据如下：

证券	收益率	期望收益率	标准差	组合比例
A	r_A	8%	12%	x
B	r_B	13%	20%	$1 - x$

证券 A、证券 B 收益率的相关系数为 $\rho = 0.25$ 。现将证券 A 和证券 B 构造投资组合 p ，其组合比例为 x 、 $1 - x$ 。无风险证券的收益率为 $r_f = 5\%$ ，投资组合 p 的收益率、期望收益率、标准差分别记为 r_p 、 $E(r_p)$ 、 σ_p 。

试求 $\max \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}$ 时投资组合 p 中证券 A、证券 B 的组合比例及 $E(r_p)$ 、 σ_p^2 。

解. 由题意： $E(r_A) = 0.08$, $E(r_B) = 0.13$ ，故组合 p 的期望收益率为：

$$E(r_p) = xE(r_A) + (1 - x)E(r_B) = 0.08x + 0.13(1 - x) = 0.13 - 0.05x$$

由题意： $\sigma_A = 0.12$, $\sigma_B = 0.2$ 组合 p 方差为：

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= (x\sigma_A)^2 + ((1 - x)\sigma_B)^2 + 2\rho \cdot x\sigma_A \cdot (1 - x)\sigma_B \\ &= 0.0144x^2 + 0.04(x^2 - 2x + 1) + 0.012(x - x^2) \\ &= 0.0424x^2 - 0.068x + 0.04\end{aligned}$$

则：

$$\max \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p} = \max \frac{0.13 - 0.05x - 0.05}{\sqrt{\sigma_p^2}} = \max \frac{0.08 - 0.05x}{\sqrt{0.0424x^2 - 0.068x + 0.04}}$$

我们只需求 $y = \frac{0.08 - 0.05x}{\sqrt{0.0424x^2 - 0.068x + 0.04}}$ 的最大值即可：

$$\begin{aligned}y &= \frac{0.08 - 0.05x}{\sqrt{0.0424x^2 - 0.068x + 0.04}} \\ \Rightarrow y^2(0.0424x^2 - 0.068x + 0.04) &= 0.0064 - 0.008x + 0.0025x^2 \\ \Rightarrow (0.0424y^2 - 0.0025)x^2 - (0.068y^2 - 0.008)x + (0.04y^2 - 0.0064) &= 0\end{aligned}$$

我们利用上述关于 x 方程的 $\Delta \geq 0$ 可得：

$$(0.068y^2 - 0.008)^2 - 4(0.0424y^2 - 0.0025)(0.04y^2 - 0.0064) \geq 0$$

令 $t = y^2 \geq 0$, 代入得:

$$(0.068t - 0.008)^2 - 4(0.0424t - 0.0025)(0.04t - 0.0064) \geq 0$$

第一项:

$$(0.068t - 0.008)^2 = 0.004624t^2 - 0.001088t + 0.000064$$

第二项:

$$(0.0424t - 0.0025)(0.04t - 0.0064) = 0.001696t^2 - 0.00037136t + 0.000016$$

乘以 4:

$$4(0.001696t^2 - 0.00037136t + 0.000016) = 0.006784t^2 - 0.00148544t + 0.000064$$

两式相减:

$$[0.004624t^2 - 0.001088t + 0.000064] - [0.006784t^2 - 0.00148544t + 0.000064] = -0.00216t^2 + 0.00039744t$$

故我们只需解不等式:

$$-0.00216t^2 + 0.00039744t \geq 0 \iff t(-0.00216t + 0.00039744) \geq 0$$

因 $t \geq 0$, 故:

$$\begin{aligned} -0.00216t + 0.00039744 &\geq 0 \\ t &\leq \frac{0.00039744}{0.00216} = 0.184 \end{aligned}$$

即 $y^2 \leq 0.184$, 所以:

$$|y| \leq \sqrt{0.184} \approx 0.428$$

这表明

$$\max \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p} = \max y = 0.428$$

下面我们求 $\frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}$ 最大时 x 的值: 我们将 $y^2 = 0.184$ 代入方程:

$$(0.0424y^2 - 0.0025)x^2 - (0.068y^2 - 0.008)x + (0.04y^2 - 0.0064) = 0$$

可将方程化为:

$$0.0053016x^2 - 0.004512x + 0.00096 = 0$$

其中:

$$\Delta = (0.004512)^2 - 4 \times 0.0053016 \times 0.00096 = 0$$

故:

$$x = \frac{0.004512}{2 \times 0.0053016} = \frac{0.004512}{0.0106032} \approx 0.4255$$

则

$$1 - x = 0.5745$$

$$E(r_p) = 0.13 - 0.05x \approx 0.108725$$

$$\sigma_p^2 = 0.0424x^2 - 0.068x + 0.04 \approx 0.01874$$

综上:

证券 A 组合比例	证券 B 组合比例	组合 p 期望收益率 $E(r_p)$	组合 p 方差 σ_p^2
0.4255	0.5745	0.108725	0.01874

□