

作业四

杨锐 2313878

December 2, 2025

问题 (1). 利用夏普比率求切点坐标对应的投资组合比例:

$$\begin{aligned} \max S_p &= \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R} - r_f}{(\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x})^{1/2}} \\ \text{s.t. } &\mathbf{x}^T \mathbf{e} = 1 \end{aligned}$$

解. 利用约束条件 $\mathbf{x}^T \mathbf{e} = 1$, 我们可将夏普比率改写为:

$$S_p = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R} - r_f \mathbf{x}^T \mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}}} = \frac{\mathbf{x}^T (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}}}. \quad (1)$$

注. 实际上我们将原约束优化问题转化为无约束问题。

记 $\mathbf{R}_f = \mathbf{R} - r_f \mathbf{e}$, 则问题等价于:

$$\max_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R}_f}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}}}.$$

我们令 $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})^2$, 即:

$$g(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}^T \mathbf{R}_f)^2}{\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}}.$$

那么:

$$\begin{aligned} \nabla g(\mathbf{x}) &= \frac{2(\mathbf{x}^T \mathbf{R}_f) \mathbf{R}_f \cdot (\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}) - (\mathbf{x}^T \mathbf{R}_f)^2 \cdot 2\mathbf{V} \mathbf{x}}{(\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x})^2} \\ &= \frac{2(\mathbf{x}^T \mathbf{R}_f)}{(\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x})^2} [\mathbf{R}_f (\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}) - (\mathbf{x}^T \mathbf{R}_f) \mathbf{V} \mathbf{x}]. \end{aligned}$$

令 $\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 由于 $\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x} > 0$ ($\mathbf{V}$ 正定), 且 $\mathbf{x}^T \mathbf{R}_f \neq 0$, 可得:

$$\mathbf{R}_f (\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T \mathbf{R}_f) \mathbf{V} \mathbf{x}.$$

注. 若 $\mathbf{x}^*$ 是 $g(\mathbf{x})$ 的一个局部极大值点, 且 g 在 $\mathbf{x}^*$ 处可微, 则必有 $\nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ 。

我们正是利用这一必要条件来计算可能的最优解。

令 $\lambda = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{R}_f}$, 则上式化为:

$$\mathbf{V} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{R}_f.$$

由于 $\mathbf{V}$ 可逆, 解得:

$$\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f.$$

将 $\mathbf{x}^*$ 代入约束条件 $\mathbf{x}^T \mathbf{e} = 1$:

$$\lambda \mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{\mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f}.$$

因此此时投资组合比例 $\mathbf{x}^*$ 为:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f}{\mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f} = \frac{\mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})}{\mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})}.$$

将 $\mathbf{x}^*$ 代入式 (1) 计算最大夏普比率 S_p^* :

$$\begin{aligned} S_p^* &= \frac{(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})}{\sqrt{(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{V} \mathbf{x}^*}} \\ &= \frac{\frac{(\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})}{\mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})}}{\sqrt{\frac{(\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})}{[\mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})]^2}}} \\ &= \frac{(\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e}) / \mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})}{\sqrt{(\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})} / |\mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})|} \\ &= \sqrt{(\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})}. \end{aligned}$$

故最大夏普比率 S_p^* 为:

$$S_p^* = \sqrt{(\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})}.$$

此时的期望收益率 μ_p^* 为:

$$\mu_p^* = (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{R} = \frac{(\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}}{\mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})}.$$

方差 $(\sigma_p^*)^2$ 为:

$$(\sigma_p^*)^2 = (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{V} \mathbf{x}^* = \frac{(\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})}{[\mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} - r_f \mathbf{e})]^2}.$$

注. 好像还有一点不大严谨的是: 我们需要说明利用梯度为 0 求出来的 $\mathbf{x}^*$ 为最大值的点 (梯度为 0 是 g 极值点的必要条件, 还需要确定到底是极小值点还是极大值点), 还需要进一步说明:

考虑函数 $g(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}^T \mathbf{R}_f)^2}{\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}}$, 其中 $\mathbf{R}_f = \mathbf{R} - r_f \mathbf{e}$, $\mathbf{V}$ 是正定对称矩阵。

我们已经通过梯度为零求得驻点 $\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f}{\mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f}$ 。现在我们需要验证该点对应的是最大值而不是最小值, 我们可以通过计算 $g(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}^*$ 处的黑塞矩阵并证明其在约束切空间上的负定性则可说明选取的 $\mathbf{x}^*$ 是最大值条件。

首先我们先来计算黑塞矩阵。记 $\alpha = \mathbf{x}^T \mathbf{R}_f$, $\beta = \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}$, 则 $g(\mathbf{x}) = \alpha^2 / \beta$ 。

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\alpha^2}{\beta} \right) = \frac{2\alpha \mathbf{R}_f \beta - \alpha^2 (2\mathbf{V} \mathbf{x})}{\beta^2} = \frac{2\alpha}{\beta^2} (\beta \mathbf{R}_f - \alpha \mathbf{V} \mathbf{x}).$$

此时我们对梯度再求导得到黑塞矩阵 $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \nabla^2 g(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{2\alpha}{\beta^2} (\beta \mathbf{R}_f - \alpha \mathbf{V} \mathbf{x}) \right] = 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\alpha}{\beta^2} \right] (\beta \mathbf{R}_f - \alpha \mathbf{V} \mathbf{x})^T + \frac{2\alpha}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\beta \mathbf{R}_f - \alpha \mathbf{V} \mathbf{x}).$$

其中:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\alpha}{\beta^2} \right) = \frac{\mathbf{R}_f \beta^2 - \alpha (2\beta \cdot 2\mathbf{V} \mathbf{x})}{\beta^4} = \frac{\mathbf{R}_f}{\beta^2} - \frac{4\alpha \mathbf{V} \mathbf{x}}{\beta^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\beta \mathbf{R}_f - \alpha \mathbf{V} \mathbf{x}) = \mathbf{R}_f(2\mathbf{V} \mathbf{x})^T - [\mathbf{R}_f(\mathbf{V} \mathbf{x})^T + \alpha \mathbf{V}] = \mathbf{R}_f \mathbf{x}^T \mathbf{V} - \alpha \mathbf{V}.$$

代入得：

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}) &= 2 \left(\frac{\mathbf{R}_f}{\beta^2} - \frac{4\alpha \mathbf{V} \mathbf{x}}{\beta^3} \right) (\beta \mathbf{R}_f - \alpha \mathbf{V} \mathbf{x})^T + \frac{2\alpha}{\beta^2} (\mathbf{R}_f \mathbf{x}^T \mathbf{V} - \alpha \mathbf{V}) \\ &= \frac{2}{\beta^2} \mathbf{R}_f (\beta \mathbf{R}_f - \alpha \mathbf{V} \mathbf{x})^T - \frac{8\alpha}{\beta^3} \mathbf{V} \mathbf{x} (\beta \mathbf{R}_f - \alpha \mathbf{V} \mathbf{x})^T + \frac{2\alpha}{\beta^2} (\mathbf{R}_f \mathbf{x}^T \mathbf{V} - \alpha \mathbf{V}). \end{aligned}$$

在驻点 $\mathbf{x}^*$ 处，由一阶条件有 $\beta^* \mathbf{R}_f = \alpha^* \mathbf{V} \mathbf{x}^*$ ，其中 $\alpha^* = (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{R}_f$ ， $\beta^* = (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{V} \mathbf{x}^*$ 。代入上式，前两项均为零，只剩第三项：

$$H(\mathbf{x}^*) = \frac{2\alpha^*}{(\beta^*)^2} (\mathbf{R}_f (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{V} - \alpha^* \mathbf{V}).$$

利用关系 $\mathbf{R}_f = \frac{\alpha^*}{\beta^*} \mathbf{V} \mathbf{x}^*$ ，可得：

$$H(\mathbf{x}^*) = \frac{2\alpha^*}{(\beta^*)^2} \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*} \mathbf{V} \mathbf{x}^* (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{V} - \alpha^* \mathbf{V} \right) = \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^3} \mathbf{V} \mathbf{x}^* (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{V} - \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2} \mathbf{V}.$$

由一阶条件有：

$$\beta^* \mathbf{R}_f = \alpha^* \mathbf{V} \mathbf{x}^* \iff \mathbf{x}^* = \frac{\beta^*}{\alpha^*} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f$$

将 $\mathbf{x}^*$ 代入 $\mathbf{V} \mathbf{x}^* (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{V}$ ：

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \mathbf{x}^* (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{V} &= \mathbf{V} \left(\frac{\beta^*}{\alpha^*} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f \right) \left(\frac{\beta^*}{\alpha^*} \mathbf{R}_f^T (\mathbf{V}^{-1})^T \right) \mathbf{V} \\ &= \frac{(\beta^*)^2}{(\alpha^*)^2} \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f \mathbf{R}_f^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \\ &= \frac{(\beta^*)^2}{(\alpha^*)^2} \mathbf{R}_f \mathbf{R}_f^T \end{aligned}$$

故：

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}^*) &= \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^3} \left[\frac{(\beta^*)^2}{(\alpha^*)^2} \mathbf{R}_f \mathbf{R}_f^T \right] - \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2} \mathbf{V} \\ &= \frac{2}{\beta^*} \mathbf{R}_f \mathbf{R}_f^T - \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2} \mathbf{V} \\ &= \frac{2}{(\beta^*)^2} [\beta^* \mathbf{R}_f \mathbf{R}_f^T - (\alpha^*)^2 \mathbf{V}] \end{aligned}$$

将 $\mathbf{x}^*$ 的表达式代入 α^* 的定义式：

$$\alpha^* = (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{R}_f = \left(\frac{\beta^*}{\alpha^*} \mathbf{R}_f^T \mathbf{V}^{-1} \right) \mathbf{R}_f = \frac{\beta^*}{\alpha^*} (\mathbf{R}_f^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f) \Rightarrow \mathbf{R}_f^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f = \frac{(\alpha^*)^2}{\beta^*}$$

故：

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}^*) &= \frac{2}{(\beta^*)^2} [\beta^* \mathbf{R}_f \mathbf{R}_f^T - (\alpha^*)^2 \mathbf{V}] \\ &= \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2} \left[\frac{\beta^*}{(\alpha^*)^2} \mathbf{R}_f \mathbf{R}_f^T - \mathbf{V} \right] \\ &= \frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2} \left[\frac{1}{\mathbf{R}_f^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f} \mathbf{R}_f \mathbf{R}_f^T - \mathbf{V} \right] \\ &= -\frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2} \left[\mathbf{V} - \frac{\mathbf{R}_f \mathbf{R}_f^T}{\mathbf{R}_f^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R}_f} \right] \end{aligned}$$

令 $A = V - \frac{R_f R_f^T}{R_f^T V^{-1} R_f}$, 则 $H(x^*) = -\frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2} A$ 。

现在我们只需要证明 A 在约束切空间 $\mathcal{T} = \{z : z^T e = 0\}$ 上是正定的。对任意非零 $z \in \mathbb{R}^n$:

$$z^T A z = z^T V z - \frac{(z^T R_f)^2}{R_f^T V^{-1} R_f}.$$

由 *Cauchy-Schwarz* 不等式 $(z^T R_f)^2 \leq (z^T V z)(R_f^T V^{-1} R_f)$, 可知 $z^T A z \geq 0$ 。等号成立当且仅当 z 与 $V^{-1} R_f$ 共线, 即 $z = k V^{-1} R_f$ 。由于 $e^T V^{-1} R_f > 0$, 故 $V^{-1} R_f$ 不在切空间 $\mathcal{T}$ 中, 因此对任意非零 $z \in \mathcal{T}$, z 不与 $V^{-1} R_f$ 共线, 从而 $z^T A z > 0$ 。这表明 A 在 $\mathcal{T}$ 上是正定的。

于是 $H(x^*) = -\frac{2(\alpha^*)^2}{(\beta^*)^2} A$ 在 $\mathcal{T}$ 上是负定的。根据约束优化问题的二阶充分条件, 在满足一阶条件的驻点处, 若拉格朗日函数关于变量的黑塞矩阵在约束切空间上负定, 则该点是局部极大值点。

而这样的点只有一个, 故我们能说明这个极大值点就是全局最大值点!

□