

作业五

杨锐 2313878

December 10, 2025

设 n 个风险证券的相关数据或相关符号等如下：它们的收益率为 r_i ，期望收益率为 $E(r_i)$ ； $i = 1, 2, \dots, n$ ，收益率的协方差矩阵 $V = (\sigma_{ij})_{n \times n}$ 为正定矩阵。

记 $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ ， $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$ ， $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$ ， $R_i = E(r_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ； R_i 不全相同。 $\theta = \{x \mid x^T e = 1\}$ 。

问题. 设投资组合 p 是由上述 n 个风险证券构成的一个已知投资组合，其组合比例为 x_p ($x_p^T e = 1$)，收益率为 r_p ，期望收益率为 $E(r_p)$ ，收益率标准差为 σ_p 。

(i) 试求投资组合 Q 的组合比例 x_q ，其中 x_q 为满足下述模型的解。

$$\begin{aligned} & \min \{(x_q - x_p)^T V (x_q - x_p)\} \\ & \text{s.t.} \\ & (x_q - x_p)^T R = \mu \quad (\text{其中 } \mu \text{ 为非零常数}) \\ & x_q^T e = 1 \end{aligned}$$

(ii) 试求在 $(\sigma^2, E(r))$ 坐标下，通过坐标原点及全局最小方差组合 (MVP) 的射线与上述 n 个风险证券构成的投资组合边界曲线的交点 M (非全局最小方差组合) 所对应的边界组合的方差 σ_M^2 、期望收益 $E(r_M)$ 和组合比例 x_M 。

(iii) 证明在 (i) 得出的解中， $(x_q - x_p)$ 为 $(x_M - x_{MVP})$ 的倍数， $\{(x_q - x_p)^T V (x_q - x_p)\}$ 为 $(\sigma_M^2 - \sigma_{MVP}^2)$ 的倍数。

解.

(i) 求 x_q ：

令 $y = x_q - x_p$ ，则 $x_q = x_p + y$ 。此时约束条件化为

$$\mu = (x_q - x_p)^T R = y^T R, \quad 0 = 1 - 1 = x_q^T e - x_p^T e = (x_q - x_p)^T e = y^T e.$$

即

$$y^T R = \mu, \quad y^T e = 0.$$

我们构造拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(y, \lambda_1, \lambda_2) = y^T V y + \lambda_1 (y^T R - \mu) + \lambda_2 (y^T e).$$

对 y 求梯度

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y^T V y) + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y}(y^T R) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}(y^T e) \\ &= 2Vy + \lambda_1 R + \lambda_2 e.\end{aligned}$$

注.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^T V y) + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y}(y^T R) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}(y^T e)$$

♡ $\frac{\partial}{\partial y}(y^T V y)$:

设 $V = (V_{ij})_{n \times n}$ 对称, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, 则

$$y^T V y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} y_i y_j.$$

对 y_k 求偏导 ($k = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} y_i y_j \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} \frac{\partial}{\partial y_k} (y_i y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} (\delta_{ik} y_j + y_i \delta_{jk}) \quad (\text{其中 } \delta_{ik} \text{ 为 Kronecker 符号}) \\ &= \sum_{j=1}^n V_{kj} y_j + \sum_{i=1}^n V_{ik} y_i.\end{aligned}$$

利用 V 的对称性 $V_{ik} = V_{ki}$, 得

$$\frac{\partial}{\partial y_k} (y^T V y) = \sum_{j=1}^n V_{kj} y_j + \sum_{i=1}^n V_{ki} y_i = 2 \sum_{j=1}^n V_{kj} y_j.$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial y} (y^T V y) = \begin{pmatrix} 2 \sum_{j=1}^n V_{1j} y_j \\ 2 \sum_{j=1}^n V_{2j} y_j \\ \vdots \\ 2 \sum_{j=1}^n V_{nj} y_j \end{pmatrix} = 2Vy.$$

♡ $\frac{\partial}{\partial y}(y^T R)$:

$R = (R_1, \dots, R_n)^T$, 则

$$y^T R = \sum_{i=1}^n R_i y_i.$$

对 y_k 求偏导:

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\sum_{i=1}^n R_i y_i \right) = R_k.$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial y} (y^T R) = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = R.$$

♡ $\frac{\partial}{\partial y}(y^T e)$:

由于 $e = (1, 1, \dots, 1)^T$, 有

$$y^T e = \sum_{i=1}^n y_i.$$

对 y_k 求偏导:

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) = 1.$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^T e) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e.$$

将以上三项的梯度代入, 得

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2Vy + \lambda_1 R + \lambda_2 e.$$

令梯度为 0

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2Vy + \lambda_1 R + \lambda_2 e = 0.$$

于是

$$Vy = -\frac{1}{2}(\lambda_1 R + \lambda_2 e) \implies y = -\frac{1}{2}V^{-1}(\lambda_1 R + \lambda_2 e). \quad (1)$$

注. V 为正定矩阵, 故可逆。

我们记: $A = e^T V^{-1} e$, $B = e^T V^{-1} R = R^T V^{-1} e$, $C = R^T V^{-1} R$, $\Delta = AC - B^2$

代入约束条件 $y^T e = 0$ 得

$$-\frac{1}{2}(\lambda_1 e^T V^{-1} R + \lambda_2 e^T V^{-1} e) = -\frac{1}{2}(\lambda_1 B + \lambda_2 A) = 0 \implies \lambda_2 = -\frac{B}{A}\lambda_1.$$

代入约束 $y^T R = \mu$ 得

$$-\frac{1}{2}(\lambda_1 R^T V^{-1} R + \lambda_2 R^T V^{-1} e) = -\frac{1}{2}(\lambda_1 C + \lambda_2 B) = \mu.$$

将 $\lambda_2 = -B\lambda_1/A$ 代入:

$$-\frac{1}{2} \left(\lambda_1 C - \frac{B^2}{A} \lambda_1 \right) = \mu \implies -\frac{\lambda_1}{2} \cdot \frac{AC - B^2}{A} = \mu.$$

解得

$$\lambda_1 = -\frac{2A\mu}{AC - B^2} = -\frac{2A\mu}{\Delta}, \quad \lambda_2 = -\frac{B}{A}\lambda_1 = \frac{2B\mu}{\Delta}.$$

代入 (1):

$$y = -\frac{1}{2}V^{-1} \left[-\frac{2A\mu}{\Delta} R + \frac{2B\mu}{\Delta} e \right] = \frac{\mu}{\Delta} V^{-1} (AR - Be).$$

因此

$$x_q = x_p + \frac{\mu}{\Delta} V^{-1} (AR - Be) = x_p + \mu \cdot \frac{V^{-1} [(e^T V^{-1} e)R - (e^T V^{-1} R)e]}{(e^T V^{-1} e)(R^T V^{-1} R) - (e^T V^{-1} R)^2}. \quad (2)$$

(ii) 求交点 M 所对应的边界组合的方差 σ_M^2 、期望收益 $E(r_M)$ 和组合比例 x_M :

定义 (全局最小方差组合). 全局最小方差组合 (MVP) 的组合比例、期望收益率、方差为:

$$x_{\text{MVP}} = \frac{V^{-1}e}{A}, \quad E_{\text{MVP}} = \frac{B}{A}, \quad \sigma_{\text{MVP}}^2 = \frac{1}{A}.$$

注. 第五章课件第 41 页 (我这里的 A 和 C 和课件上是反着来的).

由 (i) 我们可知在 (σ^2, E) 平面上满足方程

$$\sigma^2 = \min \{(x_q - x_p)^T V (x_q - x_p)\} = \min \{y^T V y\} = \frac{AE^2 - 2BE + C}{\Delta}. \quad (3)$$

注. 这里直接拿课件上的公式, 具体可见第五章课件第 47 面的定理 4.1

过原点 $(0, 0)$ 与点 $(\sigma_{\text{MVP}}^2, E_{\text{MVP}})$ 的射线方程为

$$\frac{E}{\sigma^2} = \frac{E_{\text{MVP}}}{\sigma_{\text{MVP}}^2} = \frac{B/A}{1/A} = B \implies E = B\sigma^2. \quad (4)$$

将 (4) 代入 (3):

$$\sigma^2 = \frac{A(B\sigma^2)^2 - 2B(B\sigma^2) + C}{\Delta} = \frac{AB^2\sigma^4 - 2B^2\sigma^2 + C}{\Delta}.$$

整理得

$$AB^2\sigma^4 - (AC + B^2)\sigma^2 + C = 0. \quad (5)$$

因为 $\sigma^2 = 1/A$ 对应 MVP 点, 故 $(\sigma^2 - 1/A)$ 是 (5) 的一个因子. 解得另一根为

$$\sigma_M^2 = \frac{C}{B^2}.$$

代入 $E = B\sigma^2$ 得

$$E_M = B \cdot \frac{C}{B^2} = \frac{C}{B}.$$

注. 由第五章课件第 38 面我们可知, $M-V$ 组合最优解的组合比例一般形式为 $x = g + hE$, 其中

$$g = \frac{CV^{-1}e - BV^{-1}R}{\Delta}, \quad h = \frac{AV^{-1}R - BV^{-1}e}{\Delta}.$$

代入 $E_M = C/B$:

$$\begin{aligned} x_M &= g + h \cdot \frac{C}{B} \\ &= \frac{CV^{-1}e - BV^{-1}R}{\Delta} + \frac{AV^{-1}R - BV^{-1}e}{\Delta} \cdot \frac{C}{B} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[CV^{-1}e - BV^{-1}R + \frac{AC}{B}V^{-1}R - CV^{-1}e \right] \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{AC}{B} - B \right) V^{-1}R \right] \\ &= \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{AC - B^2}{B} V^{-1}R \\ &= \frac{V^{-1}R}{B}. \end{aligned}$$

综上,

$$\sigma_M^2 = \frac{C}{B^2}, \quad E_M = \frac{C}{B}, \quad x_M = \frac{V^{-1}R}{B}. \quad (6)$$

(iii) 证明倍数关系:

由 (2) 知 $y = x_q - x_p = \frac{\mu}{\Delta} V^{-1}(AR - Be)$,

由 (6) 及 $x_{\text{MVP}} = V^{-1}e/A$ 得

$$x_M - x_{\text{MVP}} = \frac{V^{-1}R}{B} - \frac{V^{-1}e}{A} = \frac{1}{AB} V^{-1}(AR - Be).$$

比较两式可得

$$x_q - x_p = \frac{\mu AB}{\Delta} (x_M - x_{\text{MVP}}). \quad (7)$$

因此 $(x_q - x_p)$ 是 $(x_M - x_{\text{MVP}})$ 的倍数。

进一步, 我们有:

$$\begin{aligned} (x_q - x_p)^T V (x_q - x_p) &= y^T V y \\ &= \left(\frac{\mu AB}{\Delta} \right)^2 (x_M - x_{\text{MVP}})^T V (x_M - x_{\text{MVP}}). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} (x_M - x_{\text{MVP}})^T V (x_M - x_{\text{MVP}}) &= x_M^T V x_M + x_{\text{MVP}}^T V x_{\text{MVP}} - 2x_M^T V x_{\text{MVP}} \\ &= \frac{C}{B^2} + \frac{1}{A} - \frac{2}{A} \\ &= \frac{C}{B^2} - \frac{1}{A} = \sigma_M^2 - \sigma_{\text{MVP}}^2. \end{aligned}$$

注. $\sigma_M^2 = \frac{C}{B^2}, \sigma_{\text{MVP}}^2 = \frac{1}{A}$

于是

$$(x_q - x_p)^T V (x_q - x_p) = \frac{\mu^2 A^2 B^2}{\Delta^2} (\sigma_M^2 - \sigma_{\text{MVP}}^2). \quad (8)$$

故 $(x_q - x_p)$ 为 $(x_M - x_{\text{MVP}})$ 的倍数, $\{(x_q - x_p)^T V (x_q - x_p)\}$ 为 $(\sigma_M^2 - \sigma_{\text{MVP}}^2)$ 的倍数。

□