

作业六

杨锐 2313878

December 24, 2025

问题. 设投资组合 p 是由 3 个风险证券构成的一个已知投资组合，其组合比例为 $w_p = (w_1, w_2, w_3)^T$ ，收益率为 r_p ，期望收益率为 $E(r_p)$ 。

考虑如下单因素模型： $r_i = \alpha_i + \beta_i r_p + \varepsilon_i$ ， $i = 1, 2, 3$ ，

$$\text{cov}(r_p, \varepsilon_i) = 0, \quad E(\varepsilon_i) = 0, \quad \text{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = 0, \quad i \neq j$$

若记 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ ， $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ ， $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T$ ，求 $\alpha^T V^{-1} \beta$ 。（三证券收益率的协方差矩阵 V 为正定矩阵）



证明. 我们把单因素模型

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_p + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

写成向量形式 $r = \alpha + \beta r_p + \varepsilon$ ，其中 $E(\varepsilon) = 0$ ， $\text{Cov}(\varepsilon, r_p) = 0$ ， $\text{Cov}(\varepsilon) = D = \text{diag}(\sigma_{\varepsilon_1}^2, \sigma_{\varepsilon_2}^2, \sigma_{\varepsilon_3}^2)$ 为对角矩阵。

由于 $r_p = w_p^T r$ ，有

$$\begin{aligned} \text{Cov}(r, w_p^T r) &= \mathbb{E}[(r - \mathbb{E}[r])(w_p^T r - \mathbb{E}[w_p^T r])^T] \\ &= \mathbb{E}[(r - \mathbb{E}[r])(r - \mathbb{E}[r])^T w_p] \\ &= \mathbb{E}[(r - \mathbb{E}[r])(r - \mathbb{E}[r])^T] w_p \\ &= \text{Cov}(r) w_p \\ &= V w_p. \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} \text{Cov}(r, r_p) &= \text{Cov}(\alpha + \beta r_p + \varepsilon, r_p) \\ &= \text{Cov}(\beta r_p, r_p) + \text{Cov}(\varepsilon, r_p) \\ &= \beta \text{Cov}(r_p, r_p) \\ &= \beta \text{Var}(r_p) \\ &= \beta \sigma_p^2. \end{aligned}$$

因此

$$V w_p = \beta \sigma_p^2$$

即

$$w_p^T V = \sigma_p^2 \beta^T$$

将上述右乘 V^{-1}

$$w_p^T V V^{-1} = \sigma_p^2 \beta^T V^{-1} \Rightarrow w_p^T = \sigma_p^2 \beta^T V^{-1}$$

对上述取转置:

$$w_p = \sigma_p^2 (V^{-1})^T \beta = \sigma_p^2 V^{-1} \beta$$

将 $r_p = w_p^T r$ 代入模型得

$$r_p = w_p^T \alpha + (w_p^T \beta) r_p + w_p^T \varepsilon.$$



注. 这个 ε 的那个系数消去影响好像不大好说明, 要说明的话只能说取期望来说明.

比较严谨的方法应该是要用李上课讲的那个直接套求 β 的公式来处理比较方便一点.

比较系数可得

$$w_p^T \beta = 1, \quad w_p^T \alpha = 0. \quad (1)$$

现在, 将 w_p 的表达式代入 $w_p^T \alpha = 0$:

$$(\sigma_p^2 V^{-1} \beta)^T \alpha = 0 \iff \sigma_p^2 \beta^T (V^{-1})^T \alpha = 0 \iff \sigma_p^2 \beta^T V^{-1} \alpha = 0$$

因为 $\sigma_p^2 = \text{Var}(r_p) = w_p^T V w_p > 0$, 所以:

$$\beta^T V^{-1} \alpha = 0$$

由于 $\alpha^T V^{-1} \beta$ 是一个标量, 且 V^{-1} 是对称矩阵, 所以 $(\alpha^T V^{-1} \beta)^T = \beta^T (V^{-1})^T \alpha = \beta^T V^{-1} \alpha$ 。

$$\alpha^T V^{-1} \beta = \beta^T V^{-1} \alpha = 0$$

□