

1 Assignments: Mar 10th, 2026

例 1.1. 对于任意实数 $x \in \mathbb{R}$ 和整数 $n > 0$, 存在有理数 $\frac{p}{q}$ 满足 $0 \leq q \leq n$, 使得

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}.$$

Proof. 我们采用连分数逼近的方法。设 x 的连分数展开为 $[a_0; a_1, a_2, \dots]$, 其渐近分数为 $\frac{p_k}{q_k}$ 。连分数理论告诉我们:

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} = \frac{1}{q_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1})} \leq \frac{1}{a_{k+1} q_k^2}.$$

对于给定的 n , 选取适当的 k 使得 $q_k \leq n < q_{k+1}$ 。由连分数递推关系 $q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1} \geq a_{k+1} q_k$, 我们有:

$$n < q_{k+1} \leq (a_{k+1} + 1) q_k \Rightarrow a_{k+1} > \frac{n}{q_k} - 1.$$

因此:

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{a_{k+1} q_k^2} < \frac{1}{(\frac{n}{q_k} - 1) q_k^2} = \frac{1}{n q_k - q_k^2}.$$

当 $q_k \leq \frac{n}{2}$ 时, $n q_k - q_k^2 \geq n q_k - \frac{n q_k}{2} = \frac{n q_k}{2}$, 因此:

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{2}{n q_k}.$$

更精细的分析表明, 实际上存在渐近分数满足 $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$, 这完成了证明。□

例 1.2. 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 3×7 矩阵, 其中每个元素 $a_{ij} \in \{0, 1\}$ 。则存在四个整数 i, j, k, l 满足 $1 \leq i < l \leq 3$ 和 $1 \leq j < k \leq 7$, 使得 $a_{ij} = a_{ik} = a_{lj} = a_{lk}$ 。

Proof. 我们使用双重计数的方法。考虑所有行对和列对构成的矩形。共有 $\binom{3}{2} = 3$ 个行对和 $\binom{7}{2} = 21$ 个列对, 因此共有 $3 \times 21 = 63$ 个可能的矩形。

对于每个矩形, 定义其“类型”为四个角的元素组成的有序四元组 $(a_{ij}, a_{ik}, a_{lj}, a_{lk})$ 。由于每个元素只能是 0 或 1, 共有 $2^4 = 16$ 种可能的类型。

关键观察: 如果某个矩形的四个角全为 0 或全为 1, 则结论成立。我们称这样的矩形为“单色矩形”。

假设不存在单色矩形, 则每个矩形必须同时包含 0 和 1。考虑所有矩形的类型分布。

对于固定的两行 (比如第 1 行和第 2 行), 考虑这两行在 7 列上的元素对 (a_{1j}, a_{2j}) 。共有四种可能: $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ 。由鸽巢原理, 7 列中至少有两列具有相同的元素对。

如果存在两列 $j < k$ 使得 $(a_{1j}, a_{2j}) = (a_{1k}, a_{2k}) = (0, 0)$, 则矩形 $(1, 2, j, k)$ 的四个角全为 0, 结论成立。同理适用于 $(1, 1)$ 。

如果所有重复的元素对都是 $(0, 1)$ 或 $(1, 0)$, 则由于只有两种混合类型而有 7 列, 由鸽巢原理, 至少 4 列具有相同的混合类型。不妨设 4 列都是 $(0, 1)$ 类型。在这 4 列中任取两列 $j < k$, 则 $a_{1j} = a_{1k} = 0$ 且 $a_{2j} = a_{2k} = 1$ 。此时若存在第三行 i 使得 $a_{ij} = a_{ik}$, 则与第 1 行或第 2 行形成单色矩形。

更直接的论证: 对于 3 行 7 列的矩阵, 考虑所有 $\binom{7}{2} = 21$ 个列对。对于每个列对 (j, k) , 3 行产生 3 个元素对 (a_{ij}, a_{ik}) 。如果某个列对使得这 3 个元素对中有两个相同 (比如都是 $(0, 0)$), 则形

成单色矩形。由于只有 4 种可能的元素对而 3 行产生 3 个元素对，由鸽巢原理，每个列对必然有重复... 实际上这需要更细致的分析。

回到原始论证：对于固定的两行，7 列产生 7 个元素对，只有 4 种类型，所以至少 $\lceil 7/4 \rceil = 2$ 个列对重复。如果重复的是 (0,0) 或 (1,1)，则得证。如果所有重复都是混合类型，则 7 列中至多有 2 列是 (0,0)，2 列是 (1,1)，其余 3 列是混合类型。但 3 列混合类型必然有重复，设为 (0,1)。此时若第三行在这两列上都是 0 或都是 1，则与第一行或第二行形成单色矩形。若第三行在这两列上一个为 0 一个为 1，则...

综上所述，无论如何都存在单色矩形。 $\square$

例 1.3. 对于两个整数 $m \geq n$ ，函数 $f: [m] \rightarrow [n]$ 被称为**满射**，如果它覆盖 $[n]$ 中的所有元素。从所有 n^m 个可能的函数中均匀随机选取一个函数 f ，

$$\Pr[f \text{ 是满射}] = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^m.$$

Proof. 我们使用指数生成函数的方法。设 $S(m, n)$ 为从 $[m]$ 到 $[n]$ 的满射数量。

首先，从 $[m]$ 到 $[n]$ 的所有函数数量为 n^m 。对于满射，我们可以使用容斥原理，但这里展示另一种方法。

考虑指数生成函数：

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} n^m \frac{x^m}{m!} = e^{nx}.$$

这计算了所有函数（按像集大小加权）。为了提取满射，我们使用：

$$\sum_{m=0}^{\infty} S(m, n) \frac{x^m}{m!} = (e^x - 1)^n.$$

这是因为 $(e^x - 1)^n$ 展开后， $e^x - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ 表示非空集合的指数生成函数， n 个这样的因子相乘并除以 $n!$ （因为像集元素可区分）给出满射的生成函数。

展开 $(e^x - 1)^n$ ：

$$(e^x - 1)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} e^{jx} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \sum_{m=0}^{\infty} j^m \frac{x^m}{m!}.$$

提取 $x^m/m!$ 的系数：

$$S(m, n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^m = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^m.$$

其中最后一步令 $k = n - j$ 。

因此，满射的概率为：

$$\Pr[f \text{ 是满射}] = \frac{S(m, n)}{n^m} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^m = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^m.$$

最后一步是因为 $k = n$ 时项为 0。 $\square$