

数值分析作业 11.19

杨赜 2313878

2025 年 11 月 22 日

作业：习题 2.25、2.28(2).

问题 (习题 2.25). 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 证明: 用复化梯形公式计算 $\int_0^1 f(x)dx$ 的误差形式为

$$\int_0^1 f(x)dx - T_n(f) = \int_0^1 k(t)f'(t)dt, \quad (1)$$

其中

$$k(t) = \frac{t_{i-1} + t_i}{2} - t, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$T_n(f)$ 是复化梯形和, t_i ($i = 0, 1, \dots, n$) 为积分区间 $[0, 1]$ 的等分节点, 记 $h = t_i - t_{i-1} = \frac{1}{n}$.

解. 在区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上, 若 $x \in [t_{i-1}, t_i]$, 则有

$$f(x) = f(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^x f'(t)dt.$$

记子区间上的误差为:

$$E_i(f) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)dx - \frac{h}{2} [f(t_{i-1}) + f(t_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

我们将 $f(x)$ 用积分表示代入:

$$\begin{aligned} E_i(f) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[f(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^x f'(t)dt \right] dx - \frac{h}{2} [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^x f'(t)dt dx + hf(t_{i-1}) - \frac{h}{2} [f(t_{i-1}) + f(t_i)]. \end{aligned}$$

利用 $f(t_i) = f(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)dt$, 代入得:

$$\begin{aligned} E_i(f) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^x f'(t)dt dx + hf(t_{i-1}) - \frac{h}{2} \left[2f(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)dt \right] \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^x f'(t)dt dx - \frac{h}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)dt. \end{aligned}$$

交换积分次序:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^x f'(t)dt dx = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_t^{t_i} dx \right) f'(t)dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t)f'(t)dt.$$

代入得:

$$\begin{aligned} E_i(f) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t) f'(t) dt - \frac{h}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) dt \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(t_i - t - \frac{h}{2} \right) f'(t) dt. \end{aligned}$$

由于 $h = t_i - t_{i-1}$, 有 $\frac{t_{i-1} + t_i}{2} = t_i - \frac{h}{2}$, 因此:

$$t_i - t - \frac{h}{2} = \frac{t_{i-1} + t_i}{2} - t = k(t).$$

于是:

$$E_i(f) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} k(t) f'(t) dt.$$

故总误差为:

$$\int_0^1 f(x) dx - T_n(f) = \sum_{i=1}^n E_i(f) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} k(t) f'(t) dt = \int_0^1 k(t) f'(t) dt.$$

综上:

$$\int_0^1 f(x) dx - T_n(f) = \int_0^1 k(t) f'(t) dt$$

□

问题 (习题 2.28(2)). 利用自适应 Simpson 方法计算下列积分 (精确至 10^{-6}):

$$\int_{-4}^4 \frac{1}{1+x^2} dx$$

注. 具体算法为:

1. $h := b - a$, $S_1 := \frac{h}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$
2. $S := \sum_{k=0}^{n-1} \left[2f\left(a + \left(k + \frac{1}{4}\right)h\right) - f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) + 2f\left(a + \left(k + \frac{3}{4}\right)h\right) \right]$
 $S_2 := \frac{1}{2}S_1 + \frac{h}{6}S$
3. 判断 $|S_2 - S_1| < \epsilon$? 若是, 则转步骤 5
4. $h := h/2$, $S_1 := S_2$, 转步骤 2
5. 输出 S_2

解. 这个计算量有点大, 我才用计算机来计算每一步的求解过程:

最终结果 table 1 所示:

我们在第 6 次迭代后得到结果为: $S_2 = 2.6516353244$, 即:

$$\int_{-4}^4 \frac{1}{1+x^2} dx \approx 2.6516353244.$$

注. 具体的计算结果见下一面的表格.

其中项值代表 x_1, x_2, x_3 中所在区间中 $2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)$ 的值, S 为所有区间项值之和.

□

表 1: 求解最终结果

迭代次数	h	n	S_1	S_2	$ S_2 - S_1 $	是否继续?
初始	8.0000	1	5.4901960784	—	—	—
1	8.0000	1	5.4901960784	2.4784313725	3.0117647059	继续
2	4.0000	2	2.4784313725	2.5725490196	0.0941176471	继续
3	2.0000	4	2.5725490196	2.6477345635	0.0751855439	继续
4	1.0000	8	2.6477345635	2.6516272830	0.0038927194	继续
5	0.5000	16	2.6516272830	2.6516352807	0.0000079977	继续
6	0.2500	32	2.6516352807	2.6516353244	0.0000000438	$ S_2 - S_1 < 10^{-6}$, 终止!

表 2: 第 1 次迭代详细计算

子区间	x_1	x_2	x_3	项值
0	$x_1 = -2.0000$ $f = 0.200000$	$x_2 = 0.0000$ $f = 1.000000$	$x_3 = 2.0000$ $f = 0.200000$	-0.200000

$$S = -0.2000000000$$

$$S_2 = 0.5 \times 5.4901960784 + \frac{8}{6} \times (-0.2000000000) = 2.4784313725$$

表 3: 第 2 次迭代详细计算

子区间	x_1	x_2	x_3	项值
0	$x_1 = -3.0000$ $f = 0.100000$	$x_2 = -2.0000$ $f = 0.200000$	$x_3 = -1.0000$ $f = 0.500000$	1.000000
1	$x_1 = 1.0000$ $f = 0.500000$	$x_2 = 2.0000$ $f = 0.200000$	$x_3 = 3.0000$ $f = 0.100000$	1.000000

$$S = 2.0000000000$$

$$S_2 = 0.5 \times 2.4784313725 + \frac{4.0}{6} \times 2.0000000000 = 2.5725490196$$

表 4: 第 3 次迭代详细计算

子区间	x_1	x_2	x_3	项值
0	$x_1 = -3.5000$	$x_2 = -3.0000$	$x_3 = -2.5000$	0.326805
	$f = 0.075472$	$f = 0.100000$	$f = 0.137931$	
1	$x_1 = -1.5000$	$x_2 = -1.0000$	$x_3 = -0.5000$	1.715385
	$f = 0.307692$	$f = 0.500000$	$f = 0.800000$	
2	$x_1 = 0.5000$	$x_2 = 1.0000$	$x_3 = 1.5000$	1.715385
	$f = 0.800000$	$f = 0.500000$	$f = 0.307692$	
3	$x_1 = 2.5000$	$x_2 = 3.0000$	$x_3 = 3.5000$	0.326805
	$f = 0.137931$	$f = 0.100000$	$f = 0.075472$	

$$S = 4.0843801612$$

$$S_2 = 0.5 \times 2.5725490196 + \frac{2.0}{6} \times 4.0843801612 = 2.6477345635$$

表 5: 第 4 次迭代项值汇总 ($n = 8$)

子区间	项值
0 $([-4.00, -3.00])$	0.230281
1 $([-3.00, -2.00])$	0.425543
2 $([-2.00, -1.00])$	0.965103
3 $([-1.00, 0.00])$	2.362353
4 $([0.00, 1.00])$	2.362353
5 $([1.00, 2.00])$	0.965103
6 $([2.00, 3.00])$	0.425543
7 $([3.00, 4.00])$	0.230281

$$S = 7.9665600072$$

$$S_2 = 0.5 \times 2.6477345635 + \frac{1.0}{6} \times 7.9665600072 = 2.6516272830$$

表 6: 第 5 次迭代项值汇总 ($n = 16$)

子区间	项值
0 $([-4.00, -3.50])$	0.199924
1 $([-3.50, -3.00])$	0.260702
2 $([-3.00, -2.50])$	0.352529
3 $([-2.50, -2.00])$	0.498834
4 $([-2.00, -1.50])$	0.746109
5 $([-1.50, -1.00])$	1.184407
6 $([-1.00, -0.50])$	1.930946
7 $([-0.50, 0.00])$	2.781479
8 $([0.00, 0.50])$	2.781479
9 $([0.50, 1.00])$	1.930946
10 $([1.00, 1.50])$	1.184407
11 $([1.50, 2.00])$	0.746109
12 $([2.00, 2.50])$	0.498834
13 $([2.50, 3.00])$	0.352529
14 $([3.00, 3.50])$	0.260702
15 $([3.50, 4.00])$	0.199924

$$S = 15.9098596702 \quad S_2 = 0.5 \times 2.6516272830 + \frac{0.5}{6} \times 15.9098596702 = 2.6516352807$$

表 7: 第 6 次迭代项值汇总 ($n = 32$)

子区间范围	项值	子区间范围	项值
$([-4.00, -3.75])$	0.187485	$([0.00, 0.25])$	2.939678
$([-3.75, -3.50])$	0.212367	$([0.25, 0.50])$	2.624040
$([-3.50, -3.25])$	0.242391	$([0.50, 0.75])$	2.158277
$([-3.25, -3.00])$	0.279019	$([0.75, 1.00])$	1.702783
$([-3.00, -2.75])$	0.324245	$([1.00, 1.25])$	1.327892
$([-2.75, -2.50])$	0.380824	$([1.25, 1.50])$	1.040860
$([-2.50, -2.25])$	0.452615	$([1.50, 1.75])$	0.826277
$([-2.25, -2.00])$	0.545078	$([1.75, 2.00])$	0.665981
$([-2.00, -1.75])$	0.665981	$([2.00, 2.25])$	0.545078
$([-1.75, -1.50])$	0.826277	$([2.25, 2.50])$	0.452615
$([-1.50, -1.25])$	1.040860	$([2.50, 2.75])$	0.380824
$([-1.25, -1.00])$	1.327892	$([2.75, 3.00])$	0.324245
$([-1.00, -0.75])$	1.702783	$([3.00, 3.25])$	0.279019
$([-0.75, -0.50])$	2.158277	$([3.25, 3.50])$	0.242391
$([-0.50, -0.25])$	2.624040	$([3.50, 3.75])$	0.212367
$([-0.25, 0.00])$	2.939678	$([3.75, 4.00])$	0.187485

$$S = 31.8196244180 \quad S_2 = 0.5 \times 2.6516352807 + \frac{0.25}{6} \times 31.8196244180 = 2.6516353244$$