

数值分析作业 12.03

杨锐 2313878

2025 年 12 月 7 日

作业：[第二版] 习题 5.1、5.2、5.6.

问题 (习题 5.1). 方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $[1, 2]$ 内有唯一的根。用二分法求此根，误差不超过 10^{-2} 。若要误差不超过 10^{-3} 或 10^{-4} ，问要作多少次二分？

解.

(i) 设 $f(x) = x^3 - x - 1$ 。因为 $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 5 > 0$, 且 $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 内严格单调增加, 存在唯一实根 $x^* \in (1, 2)$ 。

(ii) 下面我们给出二分法求根（误差不超过 10^{-2} ）的结果：

n	有根区间 $[a, b]$	x_n	$f(x_n)$
1	$[1.000000000000, 2.000000000000]$	1.50000000000000000000	0.87500000000000000000
2	$[1.000000000000, 1.500000000000]$	1.25000000000000000000	-0.29687500000000000000
3	$[1.250000000000, 1.500000000000]$	1.37500000000000000000	0.22460937500000000000
4	$[1.250000000000, 1.375000000000]$	1.31250000000000000000	-0.05151367187500000000
5	$[1.312500000000, 1.375000000000]$	1.34375000000000000000	0.08261108398437500000
6	$[1.312500000000, 1.343750000000]$	1.32812500000000000000	0.01457595825195312500
7	$[1.312500000000, 1.328125000000]$	1.32031250000000000000	-0.01871061325073242188
8	$[1.320312500000, 1.328125000000]$	1.32421875000000000000	-0.00212794542312622070

由上表结果可知，我们需进行 8 次二分即可得到符合误差范围内的结果，最后解出来的根 $x \approx 1.32421875$ 。

(iii) 二分法每次迭代将区间长度减半，我们取区间中点为近似根 x_n ，则误差满足

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L_n}{2} = \frac{1}{2^n}$$

要求误差不超过 ε ，即需

$$\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon \implies 2^n \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

取对数得

$$n \geq \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) = -\log_2 \varepsilon$$

♡ 当 $\varepsilon = 10^{-3}$ 时, $-\log_2 10^{-3} = 3 \log_2 10 \approx 9.9658$, 故至少需要 $n = 10$ 次二分。

♡ 当 $\varepsilon = 10^{-4}$ 时, $-\log_2 10^{-4} = 4 \log_2 10 \approx 13.2877$, 故至少需要 $n = 14$ 次二分。

□

问题 (习题 5.2). 用二分法求超越方程 $f(x) = \sin x - \frac{x}{2} = 0$ 的唯一的正根 x^* , 要求 $|x - x^*| < 10^{-4}$ 或 $|f(x_k)| < 10^{-4}$, 并且估计最多需要的迭代次数。

解.

令 $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$, 求方程 $f(x) = 0$ 的唯一正根 x^* , 且要求 $|x_k - x^*| < 10^{-4}$ 与 $|f(x_k)| < 10^{-4}$, 并估计最多需要的迭代次数。已知该根位于区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 。

首先验证根的存在唯一性。因为

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.2146 > 0,$$

$$f(\pi) = \sin \pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \approx -1.5708 < 0,$$

且 $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}$, 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上 $f'(x) \leq \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$, 故 $f(x)$ 在该区间上严格单调递减, 因此存在唯一实根 $x^* \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 。

二分法迭代时, 第 k 次二分后区间长度 $L_k = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2^k} = \frac{\pi}{2^{k+1}}$, 取中点 x_k 作为近似根, 误差满足

$$|x_k - x^*| \leq L_k = \frac{\pi}{2^{k+1}}$$

要求 $|x_k - x^*| < 10^{-4}$, 即

$$\frac{\pi}{2^{k+1}} < 10^{-4} \implies 2^{k+1} > \pi \times 10^4 \approx 31415.9$$

取对数得

$$k + 1 > \log_2(31415.9) \approx 14.94 \implies k > 13.94,$$

故满足误差要求至少需要 $k \geq 14$ 次迭代。

我们的二分从初始区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi] = [1.5707963268, 3.1415926536]$ 开始, 结果如下:

n	有根区间 $[a, b]$	x_n	$f(x_n)$	区间长度
1	[1.5707963268, 3.1415926536]	2.356194490192345	-0.470990463909625	1.570796326795
2	[1.5707963268, 2.3561944902]	1.963495408493621	-0.057868171735524	0.785398163397
3	[1.5707963268, 1.9634954085]	1.767145867644259	0.097212346581101	0.392699081699
4	[1.7671458676, 1.9634954085]	1.865320638068940	0.024280016697739	0.196349540849
5	[1.8653206381, 1.9634954085]	1.914408023281280	-0.015659946457619	0.098174770425
6	[1.8653206381, 1.9144080233]	1.889864330675110	0.004596015255482	0.049087385212
7	[1.8898643307, 1.9144080233]	1.902136176978195	-0.005460763108576	0.024543692606
8	[1.8898643307, 1.9021361770]	1.896000253826652	-0.000414535895585	0.012271846303
9	[1.8898643307, 1.8960002538]	1.892932292250881	0.002095203790290	0.006135923152
10	[1.8929322923, 1.8960002538]	1.894466273038767	0.000841449402893	0.003067961576
11	[1.8944662730, 1.8960002538]	1.895233263432710	0.000213735545746	0.001533980788
12	[1.8952332634, 1.8960002538]	1.895616758629681	-0.000100330485888	0.000766990394
13	[1.8952332634, 1.8956167586]	1.895425011031195	0.000056719953312	0.000383495197
14	[1.8954250110, 1.8956167586]	1.895520884830438	-0.000021800910583	0.000191747598
15	[1.8954250110, 1.8955208848]	1.895472947930817	0.000017460610308	0.000095873799

我们由表格结果可知, 实际上在进行第 12 次二分, 我们就有 $|f(x_{12})| \leq 10^{-4}$, 故只要执行 12 次二分就能得到符合误差的结果: $x \approx 1.895616758629681$.

另外, 由表格结果我们也能发现: 在进行第 15(> 14) 次二分, 区间长度满足 $\leq 10^{-4}$, 和我们上面的估计相符合. $\square$

问题 (习题 5.6). 为求方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的一个根, 现将方程改为下列的等价形式, 且建立相应的迭代公式:

- (1) $x = 1 + \frac{1}{x^2}$, 迭代公式为 $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2}$;
- (2) $x^3 = 1 + x^2$, 迭代公式为 $x_{k+1} = (1 + x_k^2)^{1/3}$;
- (3) $x^2 = \frac{1}{x-1}$, 迭代公式为 $x_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$ 。

试分析每一种迭代公式的收敛性, 任选一种收敛的迭代公式计算 1.5 附近的根, 要求 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$ 。

解.

方程 $f(x) = x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近有唯一实根 x^* 。取初始区间 $[1.4, 1.6]$ 考察:

$$f(1.4) = 1.4^3 - 1.4^2 - 1 = -0.216 < 0, \quad f(1.6) = 1.6^3 - 1.6^2 - 1 = 0.296 > 0,$$

且 $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2) > 0$ 在 $[1.4, 1.6]$ 上成立, 故根 $x^* \in (1.4, 1.6)$ 。

要验证迭代公式是否收敛我们只需验证: 在根 x^* 的某个邻域内 $|\varphi'(x)| < 1$ 。下面分析三种迭代公式在区间 $[1.4, 1.6]$ 上的收敛性:

(1) $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2}$

设 $\varphi_1(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, 则 $\varphi_1'(x) = -\frac{2}{x^3}$ 。在区间 $[1.4, 1.6]$ 上, $|\varphi_1'(x)| = \frac{2}{x^3}$ 单调递减, 因此

$$|\varphi_1'(1.4)| = \frac{2}{1.4^3} \approx 0.728, \quad |\varphi_1'(1.6)| = \frac{2}{1.6^3} \approx 0.488$$

故在 $[1.4, 1.6]$ 上, $|\varphi_1'(x)| \leq 0.728 < 1$, 满足局部收敛条件。

(2) $x_{k+1} = (1 + x_k^2)^{1/3}$

设 $\varphi_2(x) = (1 + x^2)^{1/3}$, 则

$$\varphi_2'(x) = \frac{2x}{3(1 + x^2)^{2/3}} \leq \frac{2 \cdot 1.6}{3(1 + 1.4^2)^{2/3}} \approx 0.514 < 1$$

故在 $[1.4, 1.6]$ 上, $|\varphi_2'(x)| \leq 0.514 < 1$, 满足局部收敛条件。

(3) $x_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$

设 $\varphi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, 则 $\varphi_3'(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{-3/2}$, 所以

$$|\varphi_3'(x)| = \frac{1}{2}(x-1)^{-3/2}$$

在 $[1.4, 1.6]$ 上, $x-1 \in [0.4, 0.6]$, $(x-1)^{-3/2}$ 单调递减, 因此

$$|\varphi_3'(1.4)| = \frac{1}{2} \times 0.4^{-3/2} = \frac{1}{2} \times (0.4^{-1.5}) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{0.4\sqrt{0.4}} \right) \approx \frac{1}{2} \times \frac{1}{0.253} \approx 1.976,$$

$$|\varphi_3'(1.6)| = \frac{1}{2} \times 0.6^{-3/2} = \frac{1}{2} \times (0.6^{-1.5}) \approx \frac{1}{2} \times \frac{1}{0.464} \approx 1.078$$

在 $[1.4, 1.6]$ 上 $|\varphi_3'(x)| \geq 1.078 > 1$, 不满足收敛条件, 因此该迭代公式在 x^* 附近不收敛。

下面我们选择收敛的迭代公式 (2) $x_{k+1} = (1 + x_k^2)^{1/3}$ 进行计算, 取 $x_0 = 1.5$ 。

迭代的结果如下表所示:

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	1.5000000000000000	—
1	1.481248034203685	0.018751965796315
2	1.472705729639394	0.008542304564291
3	1.468817313664499	0.003888415974895
4	1.467047973200597	0.001769340463902
5	1.466243010114747	0.000804963085850
6	1.465876820168813	0.000366189945934
7	1.465710240775865	0.000166579392948
8	1.465634465238510	0.000075775537355
9	1.465599995853316	0.000034469385194
10	1.465584316195651	0.000015679657665
11	1.465577183742211	0.000007132453440

其中：

$$|x_{11} - x_{10}| \approx |1.465577183742211 - 1.465584316195651| = 0.000007132453440 < 10^{-5}.$$

因此，我们取近似根 $x^* \approx 1.465577183742211$ ，满足精度要求。

□