

数值分析作业 12.10

杨锐 2313878

2025 年 12 月 10 日

作业: [第二版] 习题 5.10、5.14、5.15.

问题 (5.10). 证明方程 $f(x) = x^3 - 6x - 12 = 0$ 在区间 $[2, 5]$ 内有唯一实根 p , 并对任意的初始值 $x_0 \in [2, 5]$, Newton 序列都收敛于 p 。

证明. 令 $f(x) = x^3 - 6x - 12$, 则 $f'(x) = 3x^2 - 6$, $f''(x) = 6x$ 为 $f(x)$ 在 $[2, 5]$ 上的二阶导数。

$$(1) f(2) \cdot f(5) = (8 - 12 - 12)(125 - 30 - 12) < 0;$$

$$(2) f'(x) = 3x^2 - 6 \geq 3 \cdot 2^2 - 6 = 6 > 0;$$

(3)

$$\left| \frac{f(2)}{f'(2)} \right| = \left| \frac{8 - 12 - 12}{3 \cdot 2^2 - 6} \right| = \frac{8}{3} < 3 = 5 - 2, \quad \left| \frac{f(5)}{f'(5)} \right| = \left| \frac{125 - 30 - 12}{3 \cdot 5^2 - 6} \right| = \frac{83}{69} < 3 = 5 - 2.$$

故由 **第二版定理 5.7** 知原命题成立。 □

问题 (5.14). 对 $f(x) = 0$ 的 Newton 法, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_{n-2})^2} = -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.$$

证明. 设 x^* 是方程 $f(x) = 0$ 的最优解, 且 $f(x)$ 具有二阶或二阶以上的连续导数, 满足 $f'(x^*) \neq 0$. 牛顿法得到的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛到 x^* 。

牛顿法的迭代公式为:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

对于相邻的两步迭代 $x_{n-2} \rightarrow x_{n-1}$ 和 $x_{n-1} \rightarrow x_n$, 我们有:

$$x_{n-1} - x_{n-2} = -\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}$$

$$\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})} = x_{n-2} - x_{n-1}$$

以及:

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

我们对 $f(x_{n-1})$ 在 x_{n-2} 处进行泰勒展开。令 $h = x_{n-1} - x_{n-2} = -\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}$ 。

$$f(x_{n-1}) = f(x_{n-2} + h) = f(x_{n-2}) + hf'(x_{n-2}) + \frac{h^2}{2}f''(x_{n-2}) + O(h^3)$$

代入 $h = -\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}$ ：

$$\begin{aligned} f(x_{n-1}) &= f(x_{n-2}) + \left(-\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right) f'(x_{n-2}) + \frac{1}{2} \left(-\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right)^2 f''(x_{n-2}) + O\left(\left(\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right)^3\right) \\ &= f(x_{n-2}) - f(x_{n-2}) + \frac{1}{2} \frac{(f(x_{n-2}))^2}{(f'(x_{n-2}))^2} f''(x_{n-2}) + O\left(\left(\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right)^3\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right)^2 f''(x_{n-2}) + O\left(\left(\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right)^3\right) \end{aligned}$$

由牛顿法公式和泰勒展开结果可得：

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_{n-2})^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}{\left(\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{f'(x_{n-1})} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right)^2 f''(x_{n-2}) + O\left(\left(\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right)^3\right) \right]}{\left(\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{f'(x_{n-1})}\right) \left[\frac{1}{2} f''(x_{n-2}) + \frac{O\left(\left(\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right)^3\right)}{\left(\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right)^2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{f'(x_{n-1})}\right) \left[\frac{1}{2} f''(x_{n-2}) + O\left(\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right) \right] \end{aligned}$$

由于 $x_n \rightarrow x^*$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时，我们有：

$$\heartsuit \quad x_{n-1} \rightarrow x^*, \text{ 故 } f'(x_{n-1}) \rightarrow f'(x^*)$$

$$\heartsuit \quad x_{n-2} \rightarrow x^*, \text{ 故 } f''(x_{n-2}) \rightarrow f''(x^*)$$

$$\heartsuit \quad f(x_{n-2}) \rightarrow f(x^*) = 0, \text{ 故 } O\left(\frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}\right) \rightarrow O(0) = 0$$

代入极限值：

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{f'(x^*)} \left(\frac{1}{2} f''(x^*) + 0 \right) \\ &= -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \end{aligned}$$

故：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_{n-2})^2} = -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.$$

□

问题 (5.15). 用 Newton 下山法求方程 $x^3 + 4x - 10 = 0$ 在 $[0, 2]$ 内的根。取初始值 $x_0 = 0.1$, 并且与 Newton 法进行比较。

解. 我用 python 来处理, 精度到 10^{-15} .

♡ Newton 法迭代过程如下:

表 1: Newton 法迭代过程

k	x_k	$f(x_k)$
0	0.1000000000000000	-9.599000000000000
1	2.481885856079404	15.215358198728335
2	1.805024165093047	3.101067979966130
3	1.579890422153529	0.263053095119627
4	1.556992667702742	0.002473038119202
5	1.556773284339790	0.000000224799221
6	1.556773264394212	0.000000000000002
7	1.556773264394211	0.000000000000000

Newton 法在 7 次迭代后收敛至近似根 $x^* \approx 1.556773264394211$ 。

♡ Newton 下山法迭代过程如下:

表 2: Newton 下山法迭代过程

k	x_k	$f(x_k)$	λ_k
0	0.1000000000000000	-9.599000000000000	1.0
1	1.290942928039702	-2.684828466481791	1.0
2	1.589270430253988	0.371229983740445	1.0
3	1.557205211853520	0.004869191019477	1.0
4	1.556773341695223	0.000000871231048	1.0
5	1.556773264394214	0.000000000000028	1.0
6	1.556773264394212	0.000000000000002	1.0

Newton 下山法在 6 次迭代后收敛至近似根 $x^* \approx 1.556773264394212$ 。

□