

第 5 单元课堂练习

杨锐 2313878

2026 年 5 月 27 日

Exercise.

用图解法求解：

$$\min Z = P_1 d_3^+ + P_2 d_4^- + P_3(4d_1^- + d_2^-) + P_4 d_6^+ + P_5 d_5^- + P_6(4d_1^+ + d_2^+)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 120, \\ x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 150, \\ 50x_1 + 30x_2 + d_3^- - d_3^+ = 4600, \\ x_1 + d_4^- - d_4^+ = 50, \\ x_2 + d_5^- - d_5^+ = 80, \\ d_1^+ + d_6^- - d_6^+ = 20, \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6. \end{cases}$$



解. 我们按优先级从前往后做。

1) $P_1 : \min d_3^+$ 由

$$50x_1 + 30x_2 + d_3^- - d_3^+ = 4600$$

可知要让 d_3^+ 最小, 点要落在

$$50x_1 + 30x_2 \leq 4600$$

这一侧, 此时可以做到 $d_3^+ = 0$ 。

2) $P_2 : \min d_4^-$ 由

$$x_1 + d_4^- - d_4^+ = 50$$

得到

$$d_4^- = \max(50 - x_1, 0).$$

所以最优就是把 d_4^- 压到 0, 即

$$x_1 \geq 50.$$

3) $P_3 : \min(4d_1^- + d_2^-)$ 若想这一层目标值为 0, 只能有

$$d_1^- = 0, \quad d_2^- = 0,$$

对应

$$2x_1 + x_2 \geq 120, \quad x_1 + 3x_2 \geq 150.$$

4) $P_4 : \min d_6^+$ 由

$$d_1^+ + d_6^- - d_6^+ = 20$$

可写成

$$d_6^+ = \max(d_1^+ - 20, 0).$$

又

$$d_1^+ = \max(2x_1 + x_2 - 120, 0),$$

所以要让 $d_6^+ = 0$, 需要

$$2x_1 + x_2 \leq 140.$$

到这里, 区域被夹成

$$120 \leq 2x_1 + x_2 \leq 140.$$

5) $P_5 : \min d_5^-$ 由

$$x_2 + d_5^- - d_5^+ = 80$$

得

$$d_5^- = \max(80 - x_2, 0),$$

也就是希望 x_2 尽量大。

结合前面的

$$x_1 \geq 50, \quad 2x_1 + x_2 \leq 140,$$

可得

$$x_2 \leq 140 - 2x_1 \leq 40.$$

因此 x_2 最大是 40, 并且取到 40 时必须有 $x_1 = 50$ 。此时我们得到了唯一点:

$$(x_1, x_2) = (50, 40).$$

6) $P_6 : \min(4d_1^+ + d_2^+)$ 前面已经是唯一点, 直接代入:

$$d_1^+ = 2x_1 + x_2 - 120 = 20, \quad d_2^+ = x_1 + 3x_2 - 150 = 20,$$

$$4d_1^+ + d_2^+ = 4 \times 20 + 20 = 100.$$

所以最终解是

$$\boxed{x_1^* = 50, \quad x_2^* = 40.}$$

对应偏差变量可写成

$$d_1^- = 0, d_1^+ = 20, d_2^- = 0, d_2^+ = 20, d_3^+ = 0, d_4^- = 0, d_5^- = 40, d_6^+ = 0.$$

(图见下一面)

□

