

运输问题——表上作业法求解

Melody

2026 年 5 月 11 日

1 问题描述

已知运输问题的产销数量与单位运价表如下。试用表上作业法给出最优调运方案和最小运费。

产地 A_1, A_2, A_3, A_4 的产量分别为 18, 24, 6, 12; 销地 B_1, B_2, B_3, B_4 的销量分别为 6, 14, 35, 5。单位运价如下表所示：

产地 \ 销地	销地				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	9	8	12	13	18
A_2	10	10	12	14	24
A_3	8	9	11	12	6
A_4	10	10	11	12	12
销量	6	14	35	5	

表 1 运输问题的产销平衡表与单位运价

2 建立数学模型

设 x_{ij} 为从产地 A_i 运往销地 B_j 的运量（单位与产量相同）， c_{ij} 为对应单位运价。

线性规划模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i, & i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{产量约束}) \\ \sum_{i=1}^4 x_{ij} = b_j, & j = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{销量约束}) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

产销平衡验证：

$$\sum a_i = 18 + 24 + 6 + 12 = 60, \quad \sum b_j = 6 + 14 + 35 + 5 = 60.$$

$\sum a_i = \sum b_j = 60$ ，产销平衡，可以直接应用表上作业法。基变量数应为 $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ 个。

3 第一步：用最小元素法确定初始基可行解

最小元素法的基本思想：

就近优先安排——每次从当前未划去的运价表中找出最小运价 c_{ij} ，尽可能多地给 x_{ij} 分配运量（取 $\min$ 当前剩余产量与剩余销量），然后划去已耗尽的行或列，重复直到全部分配完毕。

分配过程的逐步演示

第 步： 全表最小运价为 $c_{12} = 8$ （也有 $c_{31} = 8$ ，并列时任选其一，这里先选 c_{12} ）。

$$x_{12} = \min\{a_1, b_2\} = \min\{18, 14\} = 14.$$

B_2 列需求被完全满足，划去 B_2 列； A_1 剩余产量为 $18 - 14 = 4$ 。

第 步： 剩余表中最小运价为 $c_{31} = 8$ 。

$$x_{31} = \min\{a_3, b_1\} = \min\{6, 6\} = 6.$$

A_3 行产量和 B_1 列需求同时被满足——这是产生退化的关键时刻。按惯例划去 A_3 行，保留 B_1 列（此时 B_1 已无剩余需求）。

第 步： 剩余表（去掉 A_3 行、 B_1, B_2 列）中最小运价为 $c_{43} = 11$ 。

$$x_{43} = \min\{a_4, b_3\} = \min\{12, 35\} = 12.$$

A_4 行产量被满足，划去 A_4 行； B_3 剩余需求 $35 - 12 = 23$ 。

第 步： 剩余表中最小运价为 $c_{13} = 12$ （与 $c_{23} = 12$ 并列，选 c_{13} ）。

$$x_{13} = \min\{4, 23\} = 4.$$

A_1 剩余产量被耗尽，划去 A_1 行； B_3 剩余需求 $23 - 4 = 19$ 。

第 步： 仅剩 A_2 行。 $c_{23} = 12$ 。

$$x_{23} = \min\{24, 19\} = 19.$$

B_3 列需求满足，划去 B_3 列； A_2 剩余产量 $24 - 19 = 5$ 。

第 步： 仅剩 (A_2, B_4) 一格。

$$x_{24} = \min\{5, 5\} = 5.$$

至此全部产销均已满足，分配过程结束。

初始方案与退化的处理

退化判断：

共得到 6 个基变量： $x_{12}, x_{31}, x_{43}, x_{13}, x_{23}, x_{24}$ 。

但是平衡运输问题要求 $m + n - 1 = 7$ 个基变量。

原因：第 步中 A_3 行和 B_1 列同时被划去，导致少算一个基变量。

处理方法： 补一个运量为 0 的退化基变量。这里在被划去的 B_1 列里、 A_1 行选 $x_{11} = 0$ 作为退化基变量（也可以选其他位置，例如 $x_{34} = 0$ ，结果等价）。

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	9 [0]	8 14	12 4	13	18
A_2	10	10	12 19	14 5	24
A_3	8 6	9	11	12	6
A_4	10	10	11 12	12	12
销量	6	14	35	5	

表 2 初始基可行解（最小元素法），方括号 [0] 为退化基变量

初始总运费：

$$\begin{aligned}
 z_0 &= 0 \cdot 9 + 14 \cdot 8 + 4 \cdot 12 + 19 \cdot 12 + 5 \cdot 14 + 6 \cdot 8 + 12 \cdot 11 \\
 &= 0 + 112 + 48 + 228 + 70 + 48 + 132 \\
 &= 638.
 \end{aligned}$$

4 第二步：用位势法计算检验数（第一次检验）

4.1 位势法原理

位势法 (u-v 法)：

为每行 i 设位势 u_i ，为每列 j 设位势 v_j ，要求对所有基变量格 (i, j) 满足

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

共 $m + n - 1 = 7$ 个方程， $m + n = 8$ 个未知数，自由度为 1，所以可先令 $u_1 = 0$ （任意指定一个），其余依次求出。

对所有非基变量格 (i, j) ，计算检验数

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j.$$

若所有 $\sigma_{ij} \geq 0$ ，则当前解最优；若存在 $\sigma_{ij} < 0$ ，则当前解非最优，需要调整。

4.2 计算位势

基变量集合： $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,1), (4,3)\}$ 。

从 $u_1 = 0$ 出发：

$$\text{由}(1,1): u_1 + v_1 = c_{11} = 9 \Rightarrow v_1 = 9.$$

$$\text{由}(1,2): u_1 + v_2 = c_{12} = 8 \Rightarrow v_2 = 8.$$

$$\text{由}(1,3): u_1 + v_3 = c_{13} = 12 \Rightarrow v_3 = 12.$$

$$\text{由}(2,3): u_2 + v_3 = c_{23} = 12 \Rightarrow u_2 = 0.$$

$$\text{由}(2,4): u_2 + v_4 = c_{24} = 14 \Rightarrow v_4 = 14.$$

$$\text{由}(3,1): u_3 + v_1 = c_{31} = 8 \Rightarrow u_3 = -1.$$

$$\text{由}(4,3): u_4 + v_3 = c_{43} = 11 \Rightarrow u_4 = -1.$$

得位势向量：

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = (0, 0, -1, -1), \quad (v_1, v_2, v_3, v_4) = (9, 8, 12, 14).$$

4.3 计算非基变量的检验数

对每个非基变量格逐一计算 $\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ ：

$$\sigma_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 13 - 0 - 14 = -1,$$

$$\sigma_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 10 - 0 - 9 = 1,$$

$$\sigma_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 10 - 0 - 8 = 2,$$

$$\sigma_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - (-1) - 8 = 2,$$

$$\sigma_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 11 - (-1) - 12 = 0,$$

$$\sigma_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 12 - (-1) - 14 = -1,$$

$$\sigma_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 10 - (-1) - 9 = 2,$$

$$\sigma_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 10 - (-1) - 8 = 3,$$

$$\sigma_{44} = c_{44} - u_4 - v_4 = 12 - (-1) - 14 = -1.$$

汇总到检验数表中：

σ_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	基	基	基	-1
A_2	1	2	基	基
A_3	基	2	0	-1
A_4	2	3	基	-1

表 3 第一次迭代的检验数表

存在三个负检验数 $\sigma_{14} = \sigma_{34} = \sigma_{44} = -1$ ，当前解**不是最优解**，需要调整。

按“取最负”原则任选一个负检验数对应的格作为入基变量。这里我们选 (A_4, B_4) 进基。

5 第三步：找闭回路并调整（第一次迭代）

5.1 闭回路的寻找

闭回路构造规则：

以入基格 (A_4, B_4) 为起点，沿水平/垂直方向跳跃，只允许在**基变量格**处转弯，最终回到起点形成一个闭多边形。每个顶点交替标记 $+, -, +, -, \dots$ ，起点为 $+$ 。

从 $(4, 4)$ 出发寻找闭回路：

- $(4, 4)$ 沿第 4 行向左，可到的基变量格只有 $(4, 3)$ 。
- $(4, 3)$ 沿第 3 列向上，基变量格有 $(1, 3), (2, 3)$ 。选 $(2, 3)$ 。
- $(2, 3)$ 沿第 2 行向右，基变量格只有 $(2, 4)$ 。
- $(2, 4)$ 沿第 4 列回到起点 $(4, 4)$ ，闭合。

闭回路：

$$(4, 4)^+ \rightarrow (4, 3)^- \rightarrow (2, 3)^+ \rightarrow (2, 4)^- \rightarrow (4, 4)^+.$$

$$(2, 3)^+$$

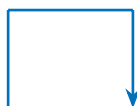


图 1 闭回路示意： $(4, 4)^+ \rightarrow (4, 3)^- \rightarrow (2, 3)^+ \rightarrow (2, 4)^- \rightarrow (4, 4)^+$

5.2 确定调整量 θ

调整量取闭回路上“-”号位置基变量值的最小者：

$$\theta = \min\{x_{43}, x_{24}\} = \min\{12, 5\} = \mathbf{5}.$$

出基变量为达到最小值的 $x_{24} = 5$ （它将变为 0）。

5.3 执行调整

沿闭回路：+ 号位置加 θ ，- 号位置减 θ 。

$$x_{44} = 0 + 5 = 5 \quad (\text{入基}),$$

$$x_{43} = 12 - 5 = 7,$$

$$x_{23} = 19 + 5 = 24,$$

$$x_{24} = 5 - 5 = 0 \quad (\text{出基}).$$

其余基变量不变： $x_{11} = 0$, $x_{12} = 14$, $x_{13} = 4$, $x_{31} = 6$ 。

调整后的总运费：

$$z_1 = z_0 + \sigma_{44} \cdot \theta = 638 + (-1) \cdot 5 = \mathbf{633}.$$

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	9 [0]	8 14	12 4	13	18
A_2	10	10	12 24	14	24
A_3	8 6	9	11	12	6
A_4	10	10	11 7	12 5	12
销量	6	14	35	5	

表 4 第一次调整后的方案， $z_1 = 633$

6 第四步：第二次检验（最优性验证）

6.1 重新计算位势

新的基变量集合： $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,1), (4,3), (4,4)\}$ 。

仍取 $u_1 = 0$ ：

$$\begin{aligned}(1,1) : v_1 &= c_{11} - u_1 = 9, \\(1,2) : v_2 &= c_{12} - u_1 = 8, \\(1,3) : v_3 &= c_{13} - u_1 = 12, \\(2,3) : u_2 &= c_{23} - v_3 = 0, \\(3,1) : u_3 &= c_{31} - v_1 = -1, \\(4,3) : u_4 &= c_{43} - v_3 = -1, \\(4,4) : v_4 &= c_{44} - u_4 = 12 - (-1) = 13.\end{aligned}$$

位势更新为：

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = (0, 0, -1, -1), \quad (v_1, v_2, v_3, v_4) = (9, 8, 12, \mathbf{13}).$$

（与上一次相比，只有 v_4 由 14 变为 13。）

6.2 重新计算检验数

$$\begin{aligned}\sigma_{14} &= 13 - 0 - 13 = 0, \\ \sigma_{21} &= 10 - 0 - 9 = 1, \\ \sigma_{22} &= 10 - 0 - 8 = 2, \\ \sigma_{24} &= 14 - 0 - 13 = 1, \\ \sigma_{32} &= 9 - (-1) - 8 = 2, \\ \sigma_{33} &= 11 - (-1) - 12 = 0, \\ \sigma_{34} &= 12 - (-1) - 13 = 0, \\ \sigma_{41} &= 10 - (-1) - 9 = 2, \\ \sigma_{42} &= 10 - (-1) - 8 = 3.\end{aligned}$$

σ_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	基	基	基	0
A_2	1	2	基	1
A_3	基	2	0	0
A_4	2	3	基	基

表 5 第二次迭代的检验数表

所有非基变量的检验数 $\sigma_{ij} \geq 0$ ，当前解已达到最优！

另外存在 $\sigma_{14} = \sigma_{33} = \sigma_{34} = 0$ ，说明该问题有**多个最优解**（沿这些零检验数对应格的闭回路调整可得到其它最优方案，但总运费不变）。

7 最终最优解

最优调运方案：

路线	运量	单价	运费
$A_1 \rightarrow B_2$	14	8	112
$A_1 \rightarrow B_3$	4	12	48
$A_2 \rightarrow B_3$	24	12	288
$A_3 \rightarrow B_1$	6	8	48
$A_4 \rightarrow B_3$	7	11	77
$A_4 \rightarrow B_4$	5	12	60
合计			633

最小总运费：

$z^* = 112 + 48 + 288 + 48 + 77 + 60 = 633$

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	9 —	8 14	12 4	13 —	18
A_2	10 —	10 —	12 24	14 —	24
A_3	8 6	9 —	11 —	12 —	6
A_4	10 —	10 —	11 7	12 5	12
销量	6	14	35	5	

表 6 最优运输方案一览

8 求解流程小结

表上作业法求解运输问题的完整流程：

1. 产销平衡检验： $\sum a_i = \sum b_j = 60$ ，平衡。
2. 最小元素法求初始解：逐次选取最小运价格分配， $x_{12}=14, x_{31}=6, x_{43}=12, x_{13}=4, x_{23}=19, x_{24}=5$ ，初始运费 $z_0 = 638$ 。
3. 处理退化：补退化基变量 $x_{11} = 0$ ，使基变量数达 $m + n - 1 = 7$ 。
4. 位势法计算检验数：得最负检验数 $\sigma_{44} = -1$ ，非最优。
5. 找闭回路并调整：闭回路 $(4, 4)^+ \rightarrow (4, 3)^- \rightarrow (2, 3)^+ \rightarrow (2, 4)^-$ ， $\theta = 5$ ， x_{24} 出基， x_{44} 入基。新方案 $z_1 = 633$ 。
6. 再次检验：所有 $\sigma_{ij} \geq 0$ ，达到最优。最小运费 $z^* = 633$ ，且因存在 $\sigma_{ij} = 0$ ，最优解非唯一。