作业 10

杨锟　2313878

2025 年 11 月 24 日

问题 (1)**.** 用分离变量法求解：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin \frac{3\pi x}{l},\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x(l-x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

解. 对于一般的问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

使用分离变量法，我们令 $u(x,t) = X(x)T(t)$，代入方程得：

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\mu$$

因此 $X(x)$ 满足如下 Sturm-Liouville 问题：

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

我们可得特征值为 $\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = 1, 2, \cdots$，特征函数为 $X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x$。
这些特征函数构成完全正交系 $\left\{\sin \frac{k\pi}{l} x\right\}$，满足正交性关系：

$$\int_0^l \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x dx = \frac{l}{2} \delta_{k,m} = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \frac{l}{2}, & m = k \end{cases}$$

将特征值 μ_k 代入与 t 相关的方程：

$$T_k''(t) + a^2 \mu_k T_k(t) = 0$$

解得：

$$T_k(t) = \bar{A}_k \sin \frac{ak\pi}{l} t + \bar{B}_k \cos \frac{ak\pi}{l} t$$

故：

$$u_k(x,t) = T_k(t) \cdot X_k(x) = \left(\bar{A}_k \sin \frac{ak\pi}{l} t + \bar{B}_k \cos \frac{ak\pi}{l} t\right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x$$

进而我们可知：

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{ak\pi}{l}t+B_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x$$

其中 $A_k=\bar{B}_k$, $B_k=\bar{A}_k$ 为待定系数。

回到我们的问题：

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & t>0\\ u|_{t=0}=\sin\frac{3\pi x}{l}, & \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=x(l-x)\\ u(0,t)=u(l,t)=0\end{cases}$$

接下来我们来确定系数 A_k 与 B_k：

♡ *确定系数 A_k：*

由 $u|_{t=0}=\sin\frac{3\pi x}{l}$ 我们可得：

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l}=\sin\frac{3\pi x}{l}$$

我们在上式两边乘上 $\sin\frac{m\pi x}{l}$ 并在 $[0,l]$ 上积分：

$$A_m\cdot\frac{l}{2}=\int_0^l\sin\frac{3\pi x}{l}\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}dx$$

而

$$\int_0^l\sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\begin{cases}0, & m\neq 3\\ \frac{l}{2}, & m=3\end{cases}$$

故

$$A_k=\begin{cases}1, & k=3\\ 0, & k\neq 3\end{cases}$$

♡ *确定系数 B_k：*

由 $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=x(l-x)$ 我们可得：

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\frac{ak\pi}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}=x(l-x)$$

我们在上式两边乘上 $\sin\frac{m\pi x}{l}$ 并在 $[0,l]$ 上积分：

$$\frac{am\pi}{l}B_m\cdot\frac{l}{2}=\int_0^l x(l-x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx$$

即：

$$B_m=\frac{2}{am\pi}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx$$

接下来我们来计算积分：

$$\begin{aligned}I_m&=\int_0^l x(l-x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx\\&=l\int_0^l x\sin\frac{m\pi x}{l}dx-\int_0^l x^2\sin\frac{m\pi x}{l}dx\end{aligned}$$

其中:

$$\int_0^l x\sin\frac{m\pi x}{l}dx = \left[-\frac{lx}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}\right]_0^l + \frac{l}{m\pi}\int_0^l \cos\frac{m\pi x}{l}dx$$
$$= -\frac{l^2}{m\pi}\cos(m\pi) + \frac{l^2}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^l = -\frac{l^2}{m\pi}(-1)^m$$

$$\begin{aligned}\int_0^l x^2\sin\frac{m\pi x}{l}dx &= \left[-\frac{lx^2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}\right]_0^l + \frac{2l}{m\pi}\int_0^l x\cos\frac{m\pi x}{l}dx \\ &= -\frac{l^3}{m\pi}(-1)^m + \frac{2l}{m\pi}\left[\frac{lx}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^l - \frac{l}{m\pi}\int_0^l \sin\frac{m\pi x}{l}dx\right] \\ &= -\frac{l^3}{m\pi}(-1)^m + \frac{2l}{m\pi}\left[0 + \frac{l^2}{m^2\pi^2}\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^l\right] \\ &= -\frac{l^3}{m\pi}(-1)^m + \frac{2l^3}{m^3\pi^3}[(-1)^m - 1]\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}I_m &= l\left[-\frac{l^2}{m\pi}(-1)^m\right] - \left[-\frac{l^3}{m\pi}(-1)^m + \frac{2l^3}{m^3\pi^3}[(-1)^m - 1]\right] \\ &= -\frac{l^3}{m\pi}(-1)^m + \frac{l^3}{m\pi}(-1)^m - \frac{2l^3}{m^3\pi^3}[(-1)^m - 1] \\ &= \frac{2l^3}{m^3\pi^3}[1 - (-1)^m]\end{aligned}$$

代入 B_m 的表达式:

$$B_m = \frac{2}{am\pi}\cdot\frac{2l^3}{m^3\pi^3}[1 - (-1)^m] = \frac{4l^3}{am^4\pi^4}[1 - (-1)^m]$$

即:

$$B_k = \begin{cases}0, & 2 \mid k \\ \frac{8l^3}{ak^4\pi^4}, & 2 \nmid k\end{cases}$$

最后我们将求解出来的系数代入通解可得:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= A_3\cos\frac{3a\pi}{l}t\cdot\sin\frac{3\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\cdot\sin\frac{k\pi x}{l} \\ &= \cos\frac{3a\pi}{l}t\cdot\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{8l^3}{a\pi^4}\sum_{\substack{k=1 \\ 2\nmid k}}^{\infty}\frac{1}{k^4}\sin\frac{ak\pi}{l}t\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\end{aligned}$$

即为我们最终所求的解. $\square$