

作业 2

杨锟 2313878

2025 年 9 月 27 日

定理 (♠). 设有 $C^\infty(\mathbb{R})$ 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 适合:

(i) 对任意 $M > 0$, 当 $|a| < M$, $|b| < M$ 时

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq c,$$

c 只与 M 有关;

(ii) 固定 a 和 b 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } a, b \text{ 同号;} \\ 1, & \text{若 } a < 0 < b. \end{cases}$$

则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x).$$

Proof. 令

$$F_n(x) = \int_{-1}^x f_n(\xi) d\xi.$$

由条件 (i), 在任一有界区间内 $F_n(x)$ 对 n 一致有界, 而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(x), \varphi(x) \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F'_n(x), \varphi(x) \rangle = (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n(x), \varphi'(x) \rangle \\ &= (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int F_n(x) \varphi'(x) dx = (-1) \int \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \right) \varphi'(x) dx \\ &= (-1) \int H(x) \varphi'(x) dx = (-1) \langle H(x), \varphi'(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

Lebesgue 控制收敛定理

故我们可知: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x)$. □

问题 (1). 验证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x), \quad f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 x^2 + 1}$$

Proof. 对于 a, b , 我们有:

$$\int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 x^2 + 1} dx \stackrel{y=xn}{=} \int_{an}^{bn} \frac{1}{\pi} \frac{1}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{\pi} (\arctan nb - \arctan na) \quad (1)$$

(i)

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = 1 = c$$

(ii) 若 a, b 同号, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan nb = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan na = \frac{\pi}{2}$, 则有 (1)=0;

若 a, b 异号, 不妨设 $a < 0 < b$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan nb = \frac{\pi}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan na = -\frac{\pi}{2}$, 则有 (1)=1。

即有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } a, b \text{ 同号;} \\ 1, & \text{若 } a < 0 < b. \end{cases}$$

故由定理 (♠), 我们可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x)$$

□

问题 (2). 验证:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t(x) = \delta(x), \quad f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Proof. 这里我们令 $n = \frac{1}{t}$, 则定理 (♠) 仍然适用:

$$\int_a^b f_t(x) dx \stackrel{y=\frac{x}{2\sqrt{t}}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{\frac{b}{2\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy$$

(i)

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(x) dx = 1$$

$f_t(x)$ 为正态分布 $N(0, 2t)$ 的概率密度函数, 故其在 $\mathbb{R}$ 上的积分为 1

(ii) 结合

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr} = \sqrt{\pi}$$

故我们可知:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } a, b \text{ 同号;} \\ 1, & \text{若 } a < 0 < b. \end{cases}$$

故由定理 (♠), 我们可知

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x)$$

□

问题 (3). 设 $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, g 是一个 m 次多项式, 证明 $f * g$ 是一个至多 m 次多项式. $f * 1$ 等于什么?

Proof. (i) 设 $g = \sum_{k=0}^m a_k x^k$, 其中 $a_n \neq 0$, 则:

$$\begin{aligned} g(x-y) &= \sum_{k=0}^m a_k (x-y)^k = \sum_{k=0}^m a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^j y^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^m \left[\sum_{k=j}^m a_k \binom{k}{j} (-1)^j x^{k-j} \right] y^j = \sum_{j=0}^m P_j(x) y^j \end{aligned}$$

$P_j(x) = \sum_{k=j}^m a_k \binom{k}{j} (-1)^j x^{k-j}$

由定义, 我们可知:

$$f * g(x) = \langle f(y), g(x-y) \rangle = \langle f(y), \sum_{j=0}^m P_j(x) y^j \rangle = \sum_{j=0}^m P_j(x) \langle f(y), y^j \rangle$$

而 $P_j(x) = \sum_{k=j}^m a_k \binom{k}{j} (-1)^j x^{k-j}$ 为至多 m 次多项式, $\langle f(y), y^j \rangle$ 为常数 $\in \mathbb{C}$, 故我们可知 $f * g$ 是一个至多 m 次多项式.

(ii) 我们令 (i) 中的 $g(x) = 1$, 则由 (i) 的结论可知 $f * 1$ 为一个至多 0 次多项式, 即为常数 $\langle f(y), 1 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy$, 故:

$$f * 1 = \langle f(y), 1 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy$$

□