

作业 3

杨锟 2313878

2025 年 9 月 30 日

问题 (1). 证明 e^{-x^2} 是 $\mathcal{S}$ 函数.

证明. (i) $e^{-x^2} \in C^\infty$

我们对 e^{-x^2} 求导, 得到:

$$\frac{d(e^{-x^2})}{dx} = -2xe^{-x^2}, \quad \frac{d^2(e^{-x^2})}{dx^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

由求导的乘积法则我们可以知道:

$$\frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n} = P_n(x)e^{-x^2}, \quad \deg(P_n) = n$$

故 e^{-x^2} 的任意阶导数存在, 即 $e^{-x^2} \in C^\infty$.

(ii) 对 $\forall \alpha, \beta$ 有: $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha D^\beta f(x)| < c(\alpha, \beta)$

由 (i) 我们可知 $D^\beta e^{-x^2} = P_\beta(x)e^{-x^2}$

$$\Rightarrow x^\alpha D^\beta e^{-x^2} = x^\alpha P_\beta(x)e^{-x^2} = P_{\beta+\alpha}(x)e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\alpha+\beta} p_k x^k e^{-x^2}$$

而对于 $x^k e^{-x^2}$, 我们可知:

$$\frac{d(x^k e^{-x^2})}{dx} = (kx^{k-1} - 2x^{k+1})e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{k}{2}} \Rightarrow |x^k e^{-x^2}| \leq \left(\frac{k}{2}\right)^k e^{-\frac{k}{2}} = M_k.$$

则

$$|x^\alpha D^\beta e^{-x^2}| = \left| \sum_{k=0}^{\alpha+\beta} p_k x^k e^{-x^2} \right| \leq \sum_{k=0}^{\alpha+\beta} |p_k x^k e^{-x^2}| \leq \sum_{k=0}^{\alpha+\beta} M_k |p_k| = c(\alpha, \beta) < \infty$$

故

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha D^\beta f(x)| < c(\alpha, \beta)$$

综上所述可知: e^{-x^2} 是 $\mathcal{S}$ 函数. □

问题 (2). 设 $P(\xi), Q(\xi)$ 皆为常系数多项式, 证明以下各个命题等价:

(1) $\varphi(x) \in \mathcal{S}$;

(2) 对任意 $P(\xi), Q(\xi)$, $P(x)Q(D)\varphi \in \mathcal{S}$;

(3) 对任意 $P(\xi)$, $Q(\xi)$, $Q(D)[P(x)\varphi(x)] \in \mathcal{S}$.

证明. 由于 $P(\xi)$, $Q(\xi)$ 皆为常系数多项式, 故我们可设 $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$, $Q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$.

(I) (1) $\Rightarrow$ (2)

首先由于 $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ 故 $\psi(x) = Q(D)\varphi(x) \in \mathcal{S}$, 进而有

$$|P(x)Q(D)\varphi(x)| = \left| \sum_{k=0}^m a_k x^k \psi(x) \right| = \sum_{k=0}^m |a_k| \cdot |x^k \psi(x)|$$

而由于 $\psi(x) \in \mathcal{S}$, 故 $\exists m_k > 0$, 使得 $|x^k \psi(x)| < m_k$, 则

$$|P(x)Q(D)\varphi(x)| < \sum_{k=0}^m |a_k| \cdot m_k < \infty$$

故 $P(x)Q(D)\varphi(x) \in \mathcal{S}$.

(II) (2) $\Rightarrow$ (3)

我们对乘积 $P(x)\varphi$ 求导 $Q(D)$, 有:

$$Q(D)[P(x)\varphi] = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma P(x) \cdot D^{\beta-\gamma} \varphi$$

其中 $Q(D) = \sum_{|\beta| \leq k} b_\beta D^\beta$, $\binom{\beta}{\gamma}$ 为组合系数, $D^\gamma P(x)$ 是 $P(x)$ 的 γ 阶导数 (仍为多项式).

对任意项 $D^\gamma P(x) \cdot D^{\beta-\gamma} \varphi$, 令 $P_1(x) = D^\gamma P(x)$ 为多项式, $Q_1(D) = D^{\beta-\gamma}$; 则我们由 (2) 的条件, 可知: $P_1(x)Q_1(D)\varphi = D^\gamma P(x) \cdot D^{\beta-\gamma} \varphi \in \mathcal{S}$.

(III) (3) $\Rightarrow$ (1)

取 $P(x) = 1$, $Q(D) = D^\beta$. 我们由 (3) 的条件, $Q(D)[1 \cdot \varphi] = D^\beta \varphi \in \mathcal{S}$, 故 $D^\beta \varphi$ 存在且连续. 由 β 的任意性, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

取 $Q(D) = 1$, $P(x) = x^\alpha$. 我们由 (3) 的条件, $1 \cdot [x^\alpha \varphi] = x^\alpha \varphi \in \mathcal{S}$, 故 $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \varphi(x)| < +\infty$.

结合无穷可微性, 对任意多重指标 β , 需证 $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi| < +\infty$. 取 $P(x) = x^\alpha$, $Q(D) = D^\beta$, 由 (3) 的条件, $D^\beta [x^\alpha \varphi] \in \mathcal{S}$. 展开 $D^\beta [x^\alpha \varphi]$ 可知其为有限项的和, 每项形如 $D^\gamma x^\alpha \cdot D^{\beta-\gamma} \varphi$ ($\gamma \leq \beta$), 其中 $D^\gamma x^\alpha$ 是多项式, $D^{\beta-\gamma} \varphi$ 是 φ 的导数. 由施瓦茨函数定义, 这些项的上确界有限, 故 $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi| < +\infty$.

故 $\varphi \in \mathcal{S}$.

□