

作业 4

杨锟 2313878

2025 年 10 月 22 日

问题 (1). Laplace 算子的基本解为:

$$E(r) = \begin{cases} C_n r^{2-n}, & n \geq 3 \\ C_2 \ln \frac{1}{r}, & n = 2 \end{cases} \quad (1)$$

我们现在要证明:

$$C_n = \frac{1}{(2-n)S_n} \quad (n \geq 3), \quad C_2 = \frac{1}{2\pi} \quad (2)$$

这里 S_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的表面积.

不同于我们熟知的三维球体的球体体积公式以及球体与球表面积之间的关系, 在解决问题之前, 我们先推导一下 $n(n \geq 3)$ 维球体体积与表面积的关系以及球体体积公式:

定理 (n 维球体体积与表面积的关系). 设 n 维球体半径为 R , 体积为 $V_n(R)$, 表面积为 $S_n(R)$, 则成立:

$$V_n(R) = \frac{R}{n} S_n(R) \quad (3)$$

若记 $S_n(R) = S_n R^{n-1}$, 其中 S_n 为常数, 则:

$$V_n(R) = \frac{S_n}{n} R^n = v_n R^n \quad (4)$$

注. 对于 n 维球体, 体积的最高次应该是 n , 而表面积的最高次应该是 $n-1$, 即 $\deg(S_n(R)) = n-1, \deg(V_n(R)) = n$.

证明. 体积可通过表面积的积分得到:

$$V_n(R) = \int_0^R S_n(r) dr = S_n \int_0^R r^{n-1} dr = \frac{1}{n} S_n R^n = \frac{R}{n} S_n(R)$$

□

定理 (n 维球体体积公式). n 维球体体积为:

$$V_n(R) = v_n R^n, \quad \text{其中} \quad v_n = \frac{2^n}{n!!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad (5)$$

证明. 我们采用数学归纳法证明:

当 $n = 3$ 时, $V_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$, $v_3 = \frac{4}{3}\pi$, 公式成立:

$$v_3 = \frac{2^3}{3!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^1 = \frac{4}{3}\pi$$

假设对 $n - 1$ 维情形公式成立, 考虑 n 维球体 $B_n(R)$:

$$\begin{aligned} V_n(R) &= \int_{B_n(R)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{-R}^R dx_1 \int_{\sum_{i=2}^n x_i^2 \leq R^2 - x_1^2} dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{-R}^R v_{n-1}(R^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1 \end{aligned}$$

作变量代换 $x_1 = R \cos \theta$, 则 $dx_1 = -R \sin \theta d\theta$, 当 x_1 从 $-R$ 到 R 时, θ 从 π 到 0 :

$$\begin{aligned} V_n(R) &= v_{n-1} R^n \int_{\pi}^0 (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{n-1}{2}} (-\sin \theta) d\theta \\ &= v_{n-1} R^n \int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta \\ &= 2v_{n-1} R^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta \end{aligned}$$

记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$, 利用我们在数学分析中学到的 Wallis 积分公式:

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

因此:

$$v_n = 2v_{n-1} I_n$$

分两种情况计算:

当 n 为偶数时, 设 $n = 2k$:

$$\begin{aligned} v_{2k} &= 2v_{2k-1} I_{2k} = 2 \cdot \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2^{2k}}{(2k)!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^k = \frac{2^n}{n!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

当 n 为奇数时, 设 $n = 2k + 1$:

$$\begin{aligned} v_{2k+1} &= 2v_{2k} I_{2k+1} = 2 \cdot \frac{2^{2k}}{(2k)!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \cdot \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \\ &= \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^k = \frac{2^n}{n!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

我们可以统一写为:

$$v_n = \frac{2^n}{n!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

故我们由数学归纳法, 公式得证. □

因此, 我们有:

$$S_n(R) = S_n R^{n-1}, \quad \text{其中} \quad S_n = n v_n = \frac{2^n}{(n-2)!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad (6)$$

定理. 对于球对称函数 $E(r)$, 有:

$$\Delta E(r) = \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \cdot \frac{dE}{dr} \quad (7)$$

证明. 由链式法则:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} E(r) = \frac{dE(r)}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{dE(r)}{dr} \cdot \frac{x_j}{r}$$

计算二阶导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} E(r) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{dE(r)}{dr} \cdot \frac{x_j}{r} \right) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} \cdot \left(\frac{x_j}{r} \right)^2 + \frac{dE(r)}{dr} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j}{r} \right) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} \cdot \frac{x_j^2}{r^2} + \frac{dE(r)}{dr} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) \end{aligned}$$

对 $j = 1, \dots, n$ 求和:

$$\begin{aligned} \Delta E(r) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} E(r) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{r^2} + \frac{dE(r)}{dr} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} + \frac{dE(r)}{dr} \cdot \left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{d^2 E(r)}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \cdot \frac{dE(r)}{dr} \end{aligned}$$

□

下面我们来正式求解 C_n ($n \geq 3$):

解. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为连通开集, $Q \in \Omega$, $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 。

使用 Green 公式:

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

其中 n 是 $\partial \Omega$ 的单位外法向量。

取 $v = \frac{1}{r^{n-2}}$, 其中 $r = d(x, Q)$ 。为处理奇点, 我们设 $B_{\epsilon}(Q)$ 是以 Q 为球心、 ϵ 为半径的球, 定义新的积分区域:

$$\Omega_{\epsilon} = \Omega \setminus B_{\epsilon}(Q)$$

此时 $v = r^{2-n} \in C^2(\Omega_{\epsilon}) \cap C(\overline{\Omega}_{\epsilon})$ 。

在 Ω_ϵ 上应用 Green 公式:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\Omega_\epsilon} (u\Delta v - v\Delta u)dx \\
&= \int_{\partial\Omega_\epsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \\
&= \int_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} \right] ds \\
&\quad + \int_{\partial B_\epsilon(Q)} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} \right] ds \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

在球面 $\partial B_\epsilon(Q)$ 上, 外法向量指向球心, 因此:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\partial B_\epsilon(Q)} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} \right] ds \\
&= - \int_{\partial B_\epsilon(Q)} \left(u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} \right) ds \\
&= (n-2) \int_{\partial B_\epsilon(Q)} u \cdot \frac{1}{r^{n-1}} ds + \int_{\partial B_\epsilon(Q)} \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} ds \quad (r = \epsilon)
\end{aligned}$$

应用积分中值定理, 存在 $Q^*, \hat{Q} \in \partial B_\epsilon(Q)$ 使得:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{n-2}{\epsilon^{n-1}} \cdot S_n \epsilon^{n-1} \cdot u(Q^*) + \frac{1}{\epsilon^{n-2}} \cdot S_n \epsilon^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}(\hat{Q}) \\
&= (n-2) S_n \cdot u(Q^*) + S_n \cdot \frac{\partial u}{\partial r}(\hat{Q}) \cdot \epsilon
\end{aligned}$$

当 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 时, $Q^*, \hat{Q} \rightarrow Q$, 且第二项趋于零:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I_2 = (n-2) S_n \cdot u(Q)$$

因此:

$$I = I_1 + (n-2) S_n \cdot u(Q) \quad (8)$$

另一方面, 在 Ω_ϵ 上考虑函数 $v = \frac{1}{r^{n-2}} = r^{2-n}$

$$\begin{aligned}
v'(r) &= (2-n)r^{1-n} \\
v''(r) &= (2-n)(1-n)r^{-n}
\end{aligned}$$

代入式 (7):

$$\begin{aligned}
\Delta v &= v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) \\
&= (2-n)(1-n)r^{-n} + \frac{n-1}{r} \cdot (2-n)r^{1-n} \\
&= (2-n)(1-n)r^{-n} + (n-1)(2-n)r^{-n} \\
&= (2-n)r^{-n} [(1-n) + (n-1)] = 0
\end{aligned}$$

所以:

$$I = \int_{\Omega_\epsilon} (u \cdot 0 - v\Delta u)dx = - \int_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u dx$$

令 $\epsilon \rightarrow 0^+$, 得到:

$$I = - \int_{\Omega} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u dx \quad (9)$$

联立 (8)(9) 式:

$$- \int_{\Omega} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} \right] ds + (n-2) S_n \cdot u(Q)$$

整理得:

$$u(Q) = \frac{1}{(n-2)S_n} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} ds - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) ds - \int_{\Omega} \Delta u \cdot \frac{1}{r^{n-2}} dx \right] \quad (10)$$

现在考虑分布意义下的基本解。设 $v = C_n \frac{1}{r^{n-2}}$, 对任意测试函数 $u \in C_0^\infty(\Omega)$, 有:

$$\begin{aligned} u(Q) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x-Q) u(x) dx \\ &= \langle \delta(x-Q), u(x) \rangle \\ &= \langle E(r), u(x) \rangle \\ &= \langle \Delta \left(C_n \frac{1}{r^{n-2}} \right), u(x) \rangle \\ &= C_n \left\langle \frac{1}{r^{n-2}}, \Delta u(x) \right\rangle \\ &= C_n \int_{\Omega} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u(x) dx \end{aligned} \quad (11)$$

比较 (10)(11) 两式, 对 $u \in C_0^\infty(\Omega)$, 在 $\partial\Omega$ 上: $u(x) = 0, \nabla u(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = 0$, 因此:

$$u(Q) = - \frac{1}{(n-2)S_n} \int_{\Omega} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u(x) dx = C_n \int_{\Omega} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta u(x) dx$$

由此得到:

$$C_n = - \frac{1}{(n-2)S_n}$$

其中 $S_n = nv_n = \frac{2^n}{(n-2)!!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 是 n 维单位球的表面积。 □