

作业 5

杨锟 2313878

2025 年 10 月 27 日

问题 (1). 设 $\Omega = B_R(Q)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. 证明:

$$(i) \quad u(Q) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u \, dS_p + \frac{1}{4\pi} \int_{B_R} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \Delta u \, dx$$

$$(ii) \quad \text{若 } \Delta u \geq 0, \text{ 则 } u(Q) \leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u \, dS_p.$$

我们先回顾我们在求 Laplace 方程基本解过程中用到的公式:

引理.

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u \, dx - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \, ds$$

证明. $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, 我们取 $v = \frac{1}{r}$. 但 $v = \frac{1}{r}$ 在原点处有奇点, 不满足 Green 公式的条件。

$v = \frac{1}{r} = r^{2-3}$ 是基本解的主项。为处理奇点, 设 $B_\varepsilon(0)$ 是以原点为球心、 ε 为半径的小球, 定义:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(0)$$

在新的区域 Ω_ε 上, $v = \frac{1}{r} \in C^2(\Omega_\varepsilon) \cap C(\overline{\Omega_\varepsilon})$ 。

在 Ω_ε 上应用 Green 公式:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, ds$$

由于基本解满足:

$$\Delta E(r) = \delta(r) = \begin{cases} \infty, & r = 0 \\ 0, & r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta \frac{1}{r} \Big|_{\Omega_\varepsilon} = 0$$

边界 $\partial\Omega_\varepsilon$ 由两部分组成: $\partial\Omega$ 和 ∂B_ε 。因此:

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, ds = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, ds + \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, ds$$

在球面 ∂B_ε 上, 外法向量指向球心, 因此:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} \left[u \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] ds \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} \left(-\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) ds \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} u ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} ds \end{aligned}$$

应用积分中值定理, 存在 $Q^*, \hat{Q} \in \partial B_\varepsilon$ 使得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} u ds &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \cdot u(Q^*) = 4\pi u(Q^*) \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} ds &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r}(\hat{Q}) = 4\pi\varepsilon \frac{\partial u}{\partial r}(\hat{Q}) \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $Q^*, \hat{Q} \rightarrow Q$, 且第二项趋于零。因此:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = -4\pi u(Q)$$

综合以上结果, 得到:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + 4\pi u(Q)$$

即:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds$$

□

接下来我们来证明问题:

证明. (i) 由上面结论:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds$$

由于 $\Omega = B_R(Q)$, 其中在 $\partial\Omega$ 上我们有 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{R^2}$. 则有

$$\begin{aligned} u(Q) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_R} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_R} u \left(-\frac{1}{R^2} \right) ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS + \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx \end{aligned}$$

我们在 Ω 上运用格林公式:

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

取 $v = 1$, 则有:

$$\int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{B_R(Q)} \Delta u dx$$

代入上式得:

$$\begin{aligned} u(Q) &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS + \frac{1}{4\pi R} \int_{B_R(Q)} \Delta u dx - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS + \frac{1}{4\pi} \int_{B_R(Q)} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \Delta u dx \end{aligned}$$

(ii) 我们记 $I_1 = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS$, $I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{B_R(Q)} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \Delta u dx$, 则 $u(Q) = I_1 + I_2$ 。

当 $\Delta u \geq 0$ 时, 由于在 $B_R(Q)$ 内 $\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \leq 0$, 故 $I_2 \leq 0$, 从而

$$u(Q) = I_1 + I_2 \leq I_1 = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS_p$$

故原命题成立!

□

问题 (2). 若 Ω 是有界连通开集, $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, 并且 u 在 Ω 上满足: $\Delta u \geq 0$ 且 u 不恒为常数, 则 u 必不可可在 Ω 内部达到其上确界。

证明. 我们仿照定理 6.1.1 的方法, 使用反证法。假设 u 在 Ω 上非常数但在 Ω 内部达到其上确界。

设 $M = \sup_{\Omega} u$, 且存在 $Q \in \Omega$ 使得 $u(Q) = M$ 。由于 Ω 是连通开集, 存在 $\delta > 0$ 使得闭球 $\overline{B_{\delta}(Q)} \subset \Omega$ 。

由 $\Delta u \geq 0$, 根据问题 (1) 的 (ii), 我们有:

$$u(Q) \leq \frac{1}{4\pi\delta^2} \int_{\partial B_{\delta}(Q)} u dS$$

由于 u 是非常值函数且在 Q 处达到最大值 M , 存在点 $P_0 \in B_{\delta}(Q)$ 使得 $u(P_0) < M$ 。由 u 的连续性, 存在 P_0 在球面 $\partial B_{\delta}(Q)$ 上的投影点 P (或通过连续路径连接), 以及 P 的邻域 $V_P \subset \partial B_{\delta}(Q)$, 使得对于所有 $x \in V_P$ 有:

$$u(x) \leq \frac{u(P_0) + M}{2} < M$$

我们考虑球面积分:

$$\frac{1}{4\pi\delta^2} \int_{\partial B_{\delta}(Q)} u dS = \frac{1}{4\pi\delta^2} \left(\int_{V_P} u dS + \int_{\partial B_{\delta}(Q) \setminus V_P} u dS \right)$$

在 V_P 上: $u(x) \leq \frac{u(P_0) + M}{2} < M$; 在 $\partial B_{\delta}(Q) \setminus V_P$ 上: $u(x) \leq M$

记 $S(V_P)$ 表示区域 V_P 的面积, $S(\partial B_{\delta}(Q)) = 4\pi\delta^2$ 为整个球面的面积, 则有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\delta^2} \int_{\partial B_{\delta}(Q)} u dS &\leq \frac{1}{4\pi\delta^2} \left[S(V_P) \cdot \frac{u(P_0) + M}{2} + (4\pi\delta^2 - S(V_P)) \cdot M \right] \\ &= \frac{S(V_P)}{8\pi\delta^2} \cdot u(P_0) + \left(1 - \frac{S(V_P)}{4\pi\delta^2} + \frac{S(V_P)}{8\pi\delta^2} \right) M \\ &= \frac{S(V_P)}{8\pi\delta^2} \cdot u(P_0) + \left(1 - \frac{S(V_P)}{8\pi\delta^2} \right) M \end{aligned}$$

令 $\lambda = \frac{S(V_P)}{8\pi\delta^2}$, 则 $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ (因为 $S(V_P) \leq 4\pi\delta^2$), 于是:

$$\frac{1}{4\pi\delta^2} \int_{\partial B_{\delta}(Q)} u dS \leq \lambda u(P_0) + (1 - \lambda)M < M$$

但根据平均值不等式，我们有：

$$M = u(Q) \leq \frac{1}{4\pi\delta^2} \int_{\partial B_\delta(Q)} u dS < M$$

这就得到了矛盾： $M < M$ 。因此，假设不成立， u 不可能在 Ω 内部达到其上确界。 $\square$

问题 (3). 设 Ω 是有界连通开集， $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 满足方程

$$\Delta u - u^2 = 0, \quad x \in \Omega$$

则 u 必不可可在 Ω 内部达到最大值，除非 $u \equiv 0$ 。

证明. 若 u 是常数，则代入方程 $\Delta u - u^2 = 0$ ，此时 $\Delta u = 0$ ，故 $0 - u^2 = 0$ ，解得 $u \equiv 0$ 。

若 u 不是常数，由方程可知 $\Delta u = u^2 \geq 0$ 。

由上题我们可知： u 必不可可在 Ω 内部达到其上确界，即 u 不能在 Ω 内部达到最大值，矛盾。

综上，命题得证。 $\square$