

作业 6

杨锐 2313878

2025 年 11 月 3 日

问题 (1). 求半空间 $\{(x, y, z); z > 0\}$ 以及球 $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 < \mathbb{R}^2\}$ 的格林函数, 并给出相应的狄利克雷问题的解.

上半空间. 记 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, 边界 $\partial\Omega = \{(x, y, z) : z = 0\}$. 对于点 $Q(x, y, z) \in \Omega$ ($z > 0$) 和 $P(x_1, y_1, z_1) \in \Omega$, 在 $Q_1(x, y, -z)$ 处放置与 Q 点处电荷量相同的负点电荷, 则格林函数为:

$$G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi r(P, Q)} + \frac{1}{4\pi r(P, Q_1)}$$

其中

$$r(P, Q) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}, \quad r(P, Q_1) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z + z_1)^2}$$

下面我们来验证 $G(P, Q)$ 符合格林函数的定义.

在边界 $\partial\Omega$ 上 ($z_1 = 0$):

$$G(P, Q)|_{z_1=0} = -\frac{1}{4\pi r(P, Q)} + \frac{1}{4\pi r(P, Q_1)} = 0$$

在 Ω 内部, $\Delta_P G(P, Q) = \delta(P - Q)$, 这是因为:

$$\Delta_P \left(-\frac{1}{4\pi r(P, Q)} \right) = \delta(P - Q), \quad \Delta_P \left(\frac{1}{4\pi r(P, Q_1)} \right) = 0 \quad (\text{当 } P \neq Q_1)$$

且 $Q_1 \notin \Omega$, 所以第二项在 Ω 内调和.

现在我们来计算法向导数:

$$\frac{\partial G(P, Q)}{\partial z_1} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{z_1 - z}{r(P, Q)^3} - \frac{z_1 + z}{r(P, Q_1)^3} \right]$$

在边界 $\partial\Omega$ 上, 外法向量方向为 $-z$ 方向, 因此 $\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial z_1}$. 在边界 $z_1 = 0$ 处:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = -\left. \frac{\partial G}{\partial z_1} \right|_{z_1=0} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{-z}{r(P, Q)^3} - \frac{z}{r(P, Q_1)^3} \right]_{z_1=0}$$

当 $z_1 = 0$ 时, $r(P, Q) = r(P, Q_1) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2}$, 代入得:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{z}{r^3} + \frac{z}{r^3} \right] = \frac{z}{2\pi r^3} = \frac{z}{2\pi [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2]^{3/2}}$$

对于半空间 Ω 上的狄利克雷问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y, z) \in \Omega \\ u(x, y, 0) = f(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

解可表示为:

$$u(Q) = \int_{\partial\Omega} f(P) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS_P$$

代入已求得的法向导数, 并注意到在边界上 $dS_P = dx_1 dy_1$, 我们可得:

$$u(x, y, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1, y_1) \cdot \frac{z}{2\pi[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z^2]^{3/2}} dx_1 dy_1$$

□

球. 对于球 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ 的格林函数, 我们使用球坐标系。设 $Q(\rho, \theta_1, \varphi_1)$ 为球内一点, $P(\rho_2, \theta_2, \varphi_2)$ 为变点, 球坐标变换为:

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi$$

其中 $0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho < R$ 。

为了构造球的格林函数, 我们在 Q 关于球面的反演点 Q_1 处放置适当强度的镜像电荷。设 Q 的球坐标为 $(\rho, \theta_1, \varphi_1)$, 则其反演点 Q_1 位于射线 OQ 上, 且满足:

$$|OQ_1| = \frac{R^2}{\rho}$$

我们定义球的格林函数为:

$$G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi r(P, Q)} + \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{4\pi r(P, Q_1)}$$

其中 $r(P, Q) = |P - Q|$, $r(P, Q_1) = |P - Q_1|$ 。

下面我们来验证 $G(P, Q)$ 是格林函数。

首先验证边界条件: 当 P 在球面 $\partial\Omega$ 上时, 即 $|P| = R$, 需要证明 $G(P, Q) = 0$ 。

当 P 在球面上时, 由圆幂定理我们可得:

$$\frac{r(P, Q)}{R} = \frac{\rho}{r(P, Q_1)}$$

因此, 在球面 $|P| = R$ 上:

$$G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi r(P, Q)} + \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{4\pi r(P, Q_1)} = -\frac{1}{4\pi r(P, Q)} + \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{r(P, Q)}{R\rho} = -\frac{1}{4\pi r(P, Q)} + \frac{1}{4\pi r(P, Q)} = 0$$

其次验证在 Ω 内部, $\Delta_P G(P, Q) = \delta(P - Q)$ 。第一项 $-\frac{1}{4\pi r(P, Q)}$ 的 Laplace 算子作用结果为 $\delta(P - Q)$, 而第二项 $\frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{4\pi r(P, Q_1)}$ 在 Ω 内是调和的, 因为 Q_1 在球外 ($|Q_1| = R^2/\rho > R$)。

现在计算法向导数。在球坐标系中, 外法向为径向方向, 因此:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial \rho_2} \Big|_{\rho_2=R}$$

经过计算可得:

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \cdot \frac{1}{r(P, Q)^3}$$

对于球域 Ω 上的狄利克雷问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \\ u = f, & x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$

其解为:

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial\Omega} f(P) \frac{R^2 - \rho^2}{r(P, Q)^3} dS_P$$

其中 $\rho = |Q|$, $r(P, Q) = |P - Q|$, 积分在球面 $\partial\Omega$ 上进行。

□

问题 (2). 设 u 在以 Q 为心、 R 为半径的球 B 内非负调和, 而在 $\bar{B}$ 上连续, 则对任意 $P \in B$, 有

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}u(Q) \leq u(P) \leq \frac{R+\rho}{R-\rho}u(Q)$$

其中 $\rho = |PQ|$ 。

证明. 类似求圆上 Laplace 方程的 Dirichlet 问题, 我们有:

$$u(P) = u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi)} f(\varphi) d\varphi$$

其中 $f(\varphi) = u(R, \varphi)$ 是边界值。

由于 $-1 \leq \cos(\theta - \varphi) \leq 1$, 可得:

$$\frac{R^2 - \rho^2}{(R + \rho)^2} \leq \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi)} \leq \frac{R^2 - \rho^2}{(R - \rho)^2}$$

注意到:

$$\frac{R^2 - \rho^2}{(R + \rho)^2} = \frac{R - \rho}{R + \rho}, \quad \frac{R^2 - \rho^2}{(R - \rho)^2} = \frac{R + \rho}{R - \rho}$$

因此:

$$\frac{R - \rho}{R + \rho} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi \leq u(P) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$$

由平均值性质, 当 $\rho = 0$ 时:

$$u(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$$

代入可得:

$$\frac{R - \rho}{R + \rho}u(Q) \leq u(P) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho}u(Q)$$

□

问题 (3). 证明 $n = 3$ 的可去奇点定理.

我们先来叙述一下 $n = 3$ 的可去奇点定理:

定理. 设 $u(x)$ 在 $B_R(A) \setminus \{A\}$ 中调和, 且在 A 点附近满足

$$u(x) = o\left(\frac{1}{|x - A|}\right) \quad \text{当 } x \rightarrow A$$

则我们可以通过补充定义 u 在 A 点的值, 使得 u 在整个 $B_R(A)$ 中调和。

证明. 由条件可知:

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{u(x)}{1/|x - A|} = 0$$

取固定半径 R 使得 $B_R(A) \subset \Omega$, 对任意 $\delta < R$, 考虑球环区域 $B_R(A) \setminus B_\delta(A)$ 。定义比较函数:

$$V_C(x) = C \left(\frac{1}{|x - A|} - \frac{1}{R} \right)$$

其中 C 是正常数。容易验证 V_C 满足：

$$\begin{cases} \Delta V_C = 0, & x \in B_R(A) \setminus B_\delta(A) \\ V_C|_{\partial B_R(A)} = 0 \end{cases}$$

现在定义 u_1 为如下边值问题的解：

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, & x \in B_R(A) \\ u_1|_{\partial B_R(A)} = u|_{\partial B_R(A)} \end{cases}$$

考虑函数 $w = u_1 - u$ ，则 w 满足：

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & x \in B_R(A) \setminus B_\delta(A) \\ w|_{\partial B_R(A)} = u_1|_{\partial B_R(A)} - u|_{\partial B_R(A)} = 0 \end{cases}$$

由条件 $\lim_{x \rightarrow A} \frac{u(x)}{1/|x-A|} = 0$ ，以及 u_1 在 A 点附近有界，可得：

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{w(x)}{1/|x-A|} = \lim_{x \rightarrow A} \left[\frac{u_1(x)}{1/|x-A|} - \frac{u(x)}{1/|x-A|} \right] = 0$$

对任意固定的 $C > 0$ ，存在 $\delta_0 > 0$ ，使得当 $|x - A| = \delta_0$ 时，有：

$$|w(x)| \leq V_C(x)$$

现在考虑函数 $w - V_C$ ，它在区域 $B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A)$ 中满足：

$$\begin{cases} \Delta(w - V_C) = 0, & x \in B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A) \\ (w - V_C)|_{\partial B_R(A)} = 0 \\ (w - V_C)|_{\partial B_{\delta_0}(A)} \leq 0 \end{cases}$$

由极值原理，在 $B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A)$ 中有：

$$w - V_C \leq 0 \quad \text{即} \quad w \leq V_C$$

同理，考虑函数 $w + V_C$ ，可得：

$$\begin{cases} \Delta(w + V_C) = 0, & x \in B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A) \\ (w + V_C)|_{\partial B_R(A)} = 0 \\ (w + V_C)|_{\partial B_{\delta_0}(A)} \geq 0 \end{cases}$$

由极值原理，在 $B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A)$ 中有：

$$w + V_C \geq 0 \quad \text{即} \quad w \geq -V_C$$

因此，在 $B_R(A) \setminus B_{\delta_0}(A)$ 中成立：

$$|w| \leq V_C$$

由于 δ_0 可以任意小，上述不等式实际上在 $B_R(A) \setminus \{A\}$ 中成立。现在令 $C \rightarrow 0$ ，则 $V_C \rightarrow 0$ ，于是：

$$|w| = |u_1 - u| \leq 0 \quad \text{在 } B_R(A) \setminus \{A\} \text{ 中}$$

即 $u_1 = u$ 在 $B_R(A) \setminus \{A\}$ 中。由于 u_1 在 $B_R(A)$ 中调和，我们可以通过定义 $u(A) = u_1(A)$ 来补充 u 在 A 点的值，使得 u 在整个 $B_R(A)$ 中调和。 $\square$