

作业 7

杨锐 2313878

2025 年 11 月 10 日

问题 (1). 设 P 为常系数线性偏微分算子, 而且有一基本解 $E(x)$ 使 $\text{sing supp } E = \{0\}$, 则 P 必为亚椭圆的.

证明. 设 $u \in \mathcal{D}'$, 对任意 $x \in \text{sing supp } Pu$, 必存在 x 的 ε 邻域 $B_\varepsilon(x)$, 使得 $B_\varepsilon(x) \cap \text{sing supp } Pu = \emptyset$. 令 $\varphi \in C_0^\infty(B_\varepsilon(x))$, 且 $\varphi|_{B_{\varepsilon/2}(x)} = 1$, 则 $\varphi Pu \in C_0^\infty$, 而 $P(\varphi u) = \varphi Pu + v$, v 中各项皆含有 φ 的不低于 1 阶的微商作为因子, 故在 $B_\varepsilon(x)$ 外及 $B_{\varepsilon/2}(x)$ 内 $v = 0$. 现在

$$E * P(\varphi u) = E * (\varphi Pu) + E * v,$$

其中 $E * (\varphi Pu)$ 为 C^∞ 函数, 对第二项有:

$$\text{sing supp}(E * v) \subseteq \text{sing supp } v + \{0\} = \text{sing supp } v \subseteq \text{supp } v$$

因此 $E * v$ 在 $B_{\varepsilon/2}(x)$ 上是 C^∞ 的, 而另一方面

$$E * P(\varphi u) = P(E * (\varphi u)) = (PE) * (\varphi u) = \delta * (\varphi u) = \varphi u$$

所以 φu 在 $B_{\varepsilon/2}(x)$ 上是 C^∞ 的, 即 $x \in \text{sing supp } u$. 于是

$$\text{sing supp } u \subseteq \text{sing supp } Pu$$

故: P 为亚椭圆的. □

问题 (2). 设 $K(x, t)$ 是热传导方程的基本解, 证明:

(i)

$$K(x, t) = t^{-\frac{n}{2}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right);$$

(ii) 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时有 $K(x, \varepsilon^2) \rightarrow \delta(x)$ (于 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$).

证明. (i) 我们知道热传导方程的基本解为:

$$K(x, t) = (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right) H(t)$$

而

$$\begin{aligned} t^{-\frac{n}{2}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) &= t^{-\frac{n}{2}} \cdot (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x/\sqrt{t}|^2}{4a^2}\right) \overset{=1}{H(1)} \\ &= (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right) \\ &= K(x, t) \end{aligned}$$

(ii) 考虑 $K(x, \varepsilon^2) = (4\pi a^2 \varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 \varepsilon^2}\right)$.

对任意测试函数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有:

$$\begin{aligned}\langle K(x, \varepsilon^2), \varphi(x) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \varepsilon^2) \varphi(x) dx \\ &= (4\pi a^2 \varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 \varepsilon^2}\right) \varphi(x) dx\end{aligned}$$

作变量代换 $x = \varepsilon y$, 则:

$$\begin{aligned}&= (4\pi a^2 \varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|\varepsilon y|^2}{4a^2 \varepsilon^2}\right) \varphi(\varepsilon y) \varepsilon^n dy \\ &= (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) \varphi(\varepsilon y) dy\end{aligned}$$

由于 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 存在常数 $M > 0$ 使得 $|\varphi(\varepsilon y)| \leq M$. 同时, $\exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数:

$$\left| (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) \varphi(\varepsilon y) \right| \leq M (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

由控制收敛定理:

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) \varphi(\varepsilon y) dy \\ &= (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) \varphi(0) dy \\ &= \varphi(0) \cdot (4\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) dy\end{aligned}$$

而我们熟知:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4a^2}\right) dy = (4\pi a^2)^{\frac{n}{2}}$$

因此:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle K(x, \varepsilon^2), \varphi(x) \rangle = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle$$

故当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时有 $K(x, \varepsilon^2) \rightarrow \delta(x)$ (于 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$).

□