

作业 8

杨锐 2313878

2025 年 11 月 17 日

问题 (1). 考虑热传导方程的初值问题:

$$\begin{cases} \partial_t u - a^2 \partial_{xx} u = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (1)$$

条件: 存在常数 $B > 0$, 对 $\forall t \geq 0, -\infty < x < +\infty$, 满足 $|u(x, t)| < B$.

证明 **稳定性**.

稳定性的证明.

设 u_1, u_2 分别满足:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - a^2 \partial_{xx} u_1 = 0, & t > 0 \\ u_1|_{t=0} = \varphi_1(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t u_2 - a^2 \partial_{xx} u_2 = 0, & t > 0 \\ u_2|_{t=0} = \varphi_2(x) \end{cases}$$

并且 $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \eta$, 只需证明 $|u_1 - u_2| < \eta$.

令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 满足方程:

$$\begin{cases} \partial_t w - a^2 \partial_{xx} w = 0, & t > 0 \\ w|_{t=0} = \varphi_1 - \varphi_2 \end{cases}$$

且 w 有界: $|w| \leq |u_1| + |u_2| \leq 2B$.

取任意给定点 (x_0, t_0) , $t_0 > 0$, 考虑区域 $R_0 = \{(x, t) \mid |x - x_0| \leq L, 0 \leq t \leq t_0\}$.

构造辅助函数:

$$v(x, t) = \frac{4B^2}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right) + \eta$$

则:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{4B^2 a^2}{L^2} - a^2 \cdot \frac{4B^2}{L^2} = 0$$

在抛物边界 Γ_T 上:

♠ 底边 $t = 0$: $v(x, 0) = \frac{2B^2}{L^2}(x - x_0)^2 + \eta \geq \eta > |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = w(x, 0)$, 因为 $|\varphi_1 - \varphi_2| < \eta$ 且 $(x - x_0)^2 \geq 0$.

♠ 侧边 $x = x_0 \pm L$: $v(x_0 \pm L, t) = 2B^2 + \frac{4B^2 a^2}{L^2} t + \eta \geq 2B^2 + \eta \geq 2B \geq |w(x_0 \pm L, t)|$, 因为 $|w| \leq 2B$ 且 $2B^2 + \eta \geq 2B$ (取 $B \geq 1$ 时成立).

因此 $v(x, t)|_{\Gamma_T} \geq w(x, t)|_{\Gamma_T}$ 成立. 此时我们令 $h = v - u$, 则有 $h|_{\Gamma_T} \geq 0$. 又由极值原理, h 的最大最小值在抛物边界上取到, 而 $h|_{\Gamma_T} \geq 0$, 故在 R_0 上成立:

$$h \geq 0 \Rightarrow v(x, t) \geq w(x, t)$$

即

$$w(x, t) \leq \frac{4B^2}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right) + \eta$$

同理可证:

$$w(x, t) \geq -\frac{4B^2}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right) - \eta$$

因此:

$$|w(x, t)| \leq v(x, t) = \frac{4B^2}{L^2} \left(\frac{|x - x_0|^2}{2} + a^2 t \right) + \eta$$

在点 (x_0, t_0) 处:

$$|w(x_0, t_0)| \leq \frac{4B^2 a^2}{L^2} t_0 + \eta$$

令 $L \rightarrow \infty$, 则 $|w(x_0, t_0)| \leq \eta$. 由 (x_0, t_0) 的任意性, $|u_1 - u_2| \leq \eta$.

这样我们便完成了稳定性的证明. □

问题 (2). 用傅立叶方法求解以下初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin x \end{cases} \quad (2)$$

解. 设解具有变量分离形式 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 代入齐次方程可得:

$$X(x)T'(t) - T(t) \cdot X''(x) = 0$$

分离变量得:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

由边界条件:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad \text{对} \quad \forall t, \quad u(\pi, t) = X(\pi)T(t) = 0 \quad \text{对} \quad \forall t$$

我们得到对应的 **SL 问题**:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

1. 当 $\lambda < 0$ 时, 特征方程为 $\mu^2 + \lambda = 0$, 即 $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}$, 通解为:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

代入边界条件:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

则 $X(x) \equiv 0$, 此时 $u(x, t) = 0$, 不符合初值条件, 舍去。

2. 当 $\lambda = 0$ 时, $X(x) = C_1x + C_2$, 代入边界条件:

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1\pi + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

仍然只有零解, 不符合要求。

3. 当 $\lambda > 0$ 时, 通解为:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

代入边界条件:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(\pi) = C_2 \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0 \end{cases}$$

当 $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$ 时, C_2 可以不为 0。

得到特征函数:

$$X_k(x) = C_k \sin(kx)$$

我们设 (2) 的解可表示为:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin(nx)$$

其中 $A_n(t)$ 为我们要求的待定函数。

由初始条件 $u(x, 0) = \sin x$ 得:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0) \sin(nx) = \sin x$$

利用正交性, 两边乘以 $\sin(mx)$ 并在 $[0, \pi]$ 上积分:

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n(0) \sin(nx) \right) \sin(mx) dx = \int_0^{\pi} \sin x \sin(mx) dx$$

而

$$\int_0^{\pi} \sin x \sin(mx) dx = \begin{cases} 0, & m \neq 1 \\ \frac{\pi}{2}, & m = 1 \end{cases}$$

因此:

$$A_1(0) = 1, \quad A_n(0) = 0 \quad (n \neq 1)$$

我们将 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin(nx)$ 代入方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n(t) \sin(nx)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cdot n \cos(nx)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cdot (-n^2) \sin(nx) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n(t) \sin(nx)$$

代入方程得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A'_n(t) \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n(t) \sin(nx) = 0$$

即:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [A'_n(t) + n^2 A_n(t)] \sin(nx) = 0$$

由于 $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ 是线性无关函数族, 故各项系数为零:

$$A'_n(t) + n^2 A_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

对于一阶线性常微分方程:

$$\frac{dA_n}{dt} + n^2 A_n = 0$$

其通解为:

$$A_n(t) = C_n e^{-n^2 t}$$

结合初始条件 $A_n(0) = C_n$, 我们可得:

$$A_1(t) = 1 \cdot e^{-t}, \quad A_n(t) = 0 \quad (n \neq 1)$$

于是:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin(nx) = e^{-t} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \cdot \sin(nx) = e^{-t} \sin x$$

综上: 原问题的解为:

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x$$

□