

加性组合的一些序列问题

nkuSherr1

2026 年 8 月 12 日

最近在看 Yufei Zhao 的 *Graph Theory and Additive Combinatorics*, 感觉最开始介绍的这个单色数列的挺有意思, 感觉值得去研究探讨。书上给的相关定理都没有证明, 个人感兴趣去查找了一下, 然后记录一下自己的学习笔记和一些思考, 我觉得这是一个能写出论文且值得尝试的方向。

1 一些定义

首先是 **上密度** 的定义。在 Yufei Zhao 的讲义以及加性组合的标准表述中, 我们常常关心整数集 (或更高维点阵) 的子集在 “大区间” 里所占的比例, 为此我们引入上密度; 当这个比例的下极限为正时, 就称该集合具有 **正的上密度**。

Definition 1.1 (上密度). 设 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 。定义 A 的 **上密度** (*upper density*) 为

$$\bar{d}(A) := \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{-N, -N+1, \dots, N\}|}{2N+1} = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [-N, N]|}{2N+1}.$$

若 $\bar{d}(A) > 0$, 则称 A 具有 **正的上密度** (*positive upper density*)。

更一般地, 设 $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ 。定义

$$\bar{d}(A) := \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [-N, N]^d|}{(2N+1)^d}.$$

同样地, 若 $\bar{d}(A) > 0$, 则称 A 具有正的上密度。

Definition 1.2 (星座). 设 $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ 。称 A 包含**星座** (*constellation*) F , 其中 $F \subseteq \mathbb{Z}^d$ 为有限集, 若存在 $a \in \mathbb{Z}^d$ 与 $t \in \mathbb{Z}_{>0}$, 使得

$$a + t \cdot F = \{a + tx : x \in F\} \subseteq A.$$

若对每个有限集 $F \subseteq \mathbb{Z}^d$, A 都包含星座 F , 则称 A 包含**任意星座**。

Definition 1.3 (向日葵). 设 $[N] = \{1, 2, \dots, N\}$ 已用 r 种颜色着色。一朵有 m 片花瓣、每片大小为 $k-1$ 的**向日葵**是形如

$$\{a\} \cup A_1 \cup \dots \cup A_m$$

的整数集, 其中 $A_i = \{a + d_i, a + 2d_i, \dots, a + (k-1)d_i\}$ ($i = 1, \dots, m$), 且满足:

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$, 花瓣两两不交);

(ii) A_i 中所有元素同色 (花瓣单色);
 (iii) $i \neq j$ 时, A_i 与 A_j 所用颜色不同 (不同花瓣颜色互异)。
 此时 $A_1, \dots, A_m$ 称为**花瓣**, a 称为**中心**。向日葵对每片花瓣的颜色与结构控制很强, 但**不控制**中心 a 的颜色。特别地, 若中心颜色等于某片花瓣的颜色, 则该向日葵给出一条单色 k -AP。



2 一些定理

我就按顺序先列一下书中涉及的主要定理 (以下均用**主定理**环境):

主定理 2.1 (van der Waerden). 若用有限多种颜色给整数 $\mathbb{Z}$ 着色, 则必有一个颜色类包含任意长的等差数列。

主定理 2.2 (Roth). $\mathbb{Z}$ 的每个具有正上密度的子集都包含一个长度为 3 的等差数列。

主定理 2.3 (Szemerédi). $\mathbb{Z}$ 的每个具有正上密度的子集都包含任意长的等差数列。

主定理 2.4 (多维 Szemerédi). $\mathbb{Z}^d$ 的每个具有正上密度的子集都包含任意星座 (见 定义 1.2)。

主定理 2.5 (平方差特例). 具有正上密度的整数集的任一子集, 都包含两个差为完全平方数的整数。等价地, 对某个 $x \in \mathbb{Z}$ 与 $y \in \mathbb{Z}_{>0}$, 该集合总包含

$$\{x, x + y^2\}.$$

主定理 2.6 (多项式 Szemerédi). 设 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 具有正的上密度。若 $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{Z}[X]$ 满足 $P_1(0) = \dots = P_k(0) = 0$, 则存在 $x \in \mathbb{Z}$ 与 $y \in \mathbb{Z}_{>0}$, 使得

$$x + P_1(y), \dots, x + P_k(y) \in A.$$

主定理 2.7 (Green–Tao). 素数集包含任意长度的等差数列。

2.1 van der Waerden 的证明

以下证明严格参照 UPC 离散数学讲义 Proof of Van der Waerden's Theorem (Barcelona, Juan José Rue) 复述。证明过程中用到的辅助结果用**定理**、**定义**、**命题**、**引理**区分。

Theorem 2.8 (van der Waerden, 有限版本). 设 r, k 为正整数, 则存在 $W(r, k)$, 使得若 $N \geq W(r, k)$, 则 $[N] = \{1, 2, \dots, N\}$ 的任意 r -着色都包含一条单色 k -AP。



Proposition 2.9. 设 $[N]$ 为 r -着色, $A, A+d, \dots, A+(k-1)d \subseteq [N]$ (其中 $X+t := \{x+t : x \in X\}$), 且

- (i) $A+d, \dots, A+(k-1)d$ 的着色完全相同;
- (ii) $A+d$ 是一朵有 m 片花瓣、每片大小为 $k-1$ 的向日葵 (从而其所有平移 $A+2d, \dots, A+(k-1)d$ 亦然)。

则 $A \cup (A+d) \cup \dots \cup (A+(k-1)d)$ 中包含一条单色 k -AP, 或一朵有 $m+1$ 片花瓣、每片大小为 $k-1$ 的向日葵。



Proof. 取 $A + d$, 它已知为一朵有 m 片花瓣、每片大小为 $k - 1$ 的向日葵。若其中心颜色与某片花瓣相同, 则已得到一条单色 k -AP。

现设 $A + d$ 的中心颜色与它的每片花瓣颜色都不同。记

$$A + d = \{a + d\} \cup A_1 \cup \cdots \cup A_m,$$

其中 $A_i = \{a + d + d_i, a + d + 2d_i, \dots, a + d + (k - 1)d_i\}$ 。构造

$$B = \{a\} \cup B_1 \cup \cdots \cup B_m \cup B_{m+1},$$

其中对 $i = 1, \dots, m$,

$$B_i = \{a + (d + d_i), a + 2(d + d_i), \dots, a + (k - 1)(d + d_i)\},$$

而

$$B_{m+1} = \{a + d, a + 2d, \dots, a + (k - 1)d\}$$

(即 B_{m+1} 由 $A + d, \dots, A + (k - 1)d$ 的中心组成)。显然 $B \subseteq A \cup (A + d) \cup \cdots \cup (A + (k - 1)d)$ 。

下面验证 B 是一朵有 $m + 1$ 片花瓣、每片大小为 $k - 1$ 的向日葵:

- 对 $r = 1, \dots, k - 1$ 与 $i = 1, \dots, m$, 元素 $a + r(d + d_i)$ 与 $a + d + rd_i$ 同色 (平移 d 不改变颜色), 而 $a + d + rd_i$ 与 $a + d + d_i$ 同色 (同一花瓣内同色), 故 B_i 单色。
- 若 $i \neq j$, 则 B_i 所用颜色即为 $a + d_i$ 的颜色, 与 $a + d_j$ 的颜色不同, 故 B_i 与 B_j 颜色不同。
- B_{m+1} 也单色, 因为 $A + d, \dots, A + (k - 1)d$ 着色相同; 且 B_{m+1} 的颜色与 $B_1, \dots, B_m$ 都不同, 因为 $a + d$ ($A + d$ 的中心) 的颜色与每个 $a + d + d_i$ 的颜色不同。

因此 B 即为所求向日葵。 □

Lemma 2.10. 设 k 为正整数。若对每个 r 都有 $W(r, k - 1) < \infty$, 则对每个 r, m 都存在 $W(r, m, k - 1) < \infty$, 使得: 若 $N \geq W(r, m, k - 1)$, 则 $[N]$ 的任意 r -着色要么包含一条单色 k -AP, 要么包含一朵有 m 片花瓣、每片大小为 $k - 1$ 的向日葵。

Proof. 对 m 归纳。 $m = 1$ 时, 一片大小为 $k - 1$ 的花瓣给出一条单色 $(k - 1)$ -AP (若中心与花瓣同色则更是 k -AP)。由假设 $W(r, k - 1) < \infty$, 可取 $W(r, 1, k - 1) \leq W(r, k - 1)$ 。

设 $W(r, m - 1, k - 1) < \infty$, 证 $W(r, m, k - 1) < \infty$ 。令

$$N_1 = W(r, m - 1, k - 1), \quad N_2 = 2W(rN_1, k - 1).$$

只需证 $W(r, m, k - 1) \leq N_1 N_2$ 。

取区间 $[N_1 N_2]$ 并做 r -着色。把它看成: 先拼接 $W(rN_1, k - 1)$ 个长为 N_1 的块 (第一部分), 再拼接 $W(rN_1, k - 1)$ 个长为 N_1 的块 (第二部分); 亦即两部分各有 $N_2/2$ 个长为 N_1 的块 (这正是 N_2 中因子 2 的来源)。

先只看第二部分。若其中某个块已含单色 k -AP, 则证明完成; 故可设否则。

第二部分共有 $N_2/2 = W(rN_1, k - 1)$ 个块, 每个块有 r^{N_1} 种着色方式。由 $W(rN_1, k - 1)$ 的定义 (将其应用于这些块, 而非块内元素), 存在下标构成一条 $(k - 1)$ -AP 的块

$$B + d, \dots, B + (k - 1)d,$$

使得这些块的着色完全相同。

此时 $|B + d| = N_1 = W(r, m - 1, k - 1)$ 。由归纳假设, $B + d$ 中不含单色 k -AP, 故含一朵有 $m - 1$ 片花瓣、每片大小为 $k - 1$ 的向日葵; 记 $A + d \subseteq B + d$ 为其在 $B + d$ 中的一份拷贝。

最后令 $B = (B + d) - d$, $A = (A + d) - d$, 则 $A \subseteq B$, 且 B 可能落在第一部分 (这同样是 N_2 取因子 2 的原因)。虽然无法控制 B 的着色, 但由 命题 2.9, 集合

$$A \cup (A + d) \cup \cdots \cup (A + (k - 1)d)$$

必含一条单色 k -AP, 或一朵有 m 片花瓣、每片大小为 $k - 1$ 的向日葵。归纳步完成。 $\square$

定理 2.8 的证明. 对 k 归纳。 $W(r, 1) = 1$, $W(r, 2) = r + 1$ (鸽巢原理) 已显然。

设 $W(r, k - 1) < \infty$ 对每个 r 成立。由 引理 2.10, 对每个 r, m 都有 $W(r, m, k - 1) < \infty$; 特别地 $W(r, r, k - 1) < \infty$ 。取

$$W(r, k) := W(r, r, k - 1).$$

设 $N \geq W(r, k)$, $\chi: [N] \rightarrow [r]$ 为任意着色。由 引理 2.10 (取 $m = r$), χ 要么含单色 k -AP, 要么含一朵有 r 片花瓣、每片大小为 $k - 1$ 的向日葵。后一种情形中, 中心颜色必与某片花瓣颜色相同 (共有 r 种颜色、 r 片花瓣颜色互异), 于是也得到单色 k -AP。 $\square$

主定理 2.1 的证明. 由 定理 2.8, 对每个 k, r 都存在 $W(r, k)$ 。若 $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow [r]$ 在 $\mathbb{Z}$ 上不含长度为 k 的单色等差数列, 则限制到 $[W(r, k)]$ 也不含, 与 定理 2.8 矛盾。因此对每个 k 都存在长度为 k 的单色等差数列; 由于 k 任意, 必有一个颜色类包含任意长的等差数列。 $\square$