

1 总体设计思路

本次讨论班讲解的论文是 Ge-Hua-Zhou 于 2021 年发表在 *Advances in Mathematics* 上的 COMBINATORIAL RICCI FLOWS FOR IDEAL CIRCLE PATTERNS. 论文把 Chow-Luo 提出的 **组合 Ricci 流** 推广到 **理想圆图案 (ideal circle patterns)** 的设定下, 得到了若干长时间行为的等价刻画, 并由此重新证明了 Rivin 与 Bobenko-Springborn 的两个经典定理, 同时给出了一个指数收敛的数值算法。

讨论班目标设定如下:

- **受众**: 同年级同学, 未必接触过 circle pattern 或 Ricci flow, 需要从最基本的胞腔分解、双曲几何讲起;
- **时长**: 约 120 分钟, 含 10 分钟 Q&A;
- **目的**: 让大家
 1. 理解 “ideal circle pattern 的存在性” 是一个怎样的问题;
 2. 理解 “为什么组合 Ricci 流是一个自然的求解方法”;
 3. 看到主定理 H1-H5 / E1-E4 是如何把 动力学问题和 组合条件等价起来的。

讨论班分 **五个 Part + Q&A**。这次按**论文原顺序**来讲: Section 1 → Section 2 → Section 3 → Section 4 → Section 5。

Part	主题	时长	角色
I	Section 1: 引言与主结果	15 min	定义 + 条件 + 主定理
II	Section 2 预备: 定义与两圆引理	35 min	统一符号 + 工具
III	Section 2 续: Thurston 构造与曲率映射	20 min	把几何问题代数化
IV	Section 3-4: 双曲/欧氏主结果	30 min	论文 core
V	Section 5: restriction flow 与 Rivin	15 min	收尾 + 应用
Q&A	现场提问	5-10 min	—

 *remark.* 建议把 *Part II (Section 2)* 讲得稍慢、稍详细, 因为定义、条件与符号最密集; *Part IV (Section 3-4)* 是定理主战场; *Part V (Section 5)* 突出算法思想, 避免陷入计算细节。

2 这篇论文在研究什么? 为什么是“离散分析”课程的内容?

讨论班开场前, 先用 3-5 分钟把全篇放在一个更大的图景里, 让听众明白为什么我们在“离散分析”课上读这篇文章。

2.1 论文研究的核心问题（一句话版本）

给定一个曲面 S 上的胞腔分解 $\mathfrak{D} = (V, E, F)$ 与一组边权 $\Theta : E \rightarrow (0, \pi)$ ，能否在 S 上画一组圆，让它们的相交结构由 $\mathfrak{D}$ 决定、相交角度由 Θ 决定，并且“圆几乎填满整个曲面、只剩一些点状缝隙”？更进一步，能否用一个算法把这样的圆图案算出来？

把这句话翻译成数学：是否存在 *ideal* $\mathfrak{D}$ -型 *circle pattern*？如何构造？论文给出的答案是：

1. “存在性”被一族纯组合不等式刻画（条件 H3/H4/H5 与 E3/E4），本质上是 Rivin / Bobenko–Springborn 已有结果的重新组织；
2. 真正新的贡献是“构造性”——作者定义了两个组合 Ricci 流（双曲背景与欧氏背景），证明：**这个 ODE 长时间收敛 $\iff$ 圆图案存在**，并且收敛是指数速度的。

答：存在性由一组纯组合不等式（双曲对应 H3/H4/H5，欧氏对应 E3/E4）完整刻画；构造性由组合 Ricci 流给出：从任意正初值出发，若组合条件成立，流指数收敛到目标半径向量，从而算法上可直接恢复 *circle pattern*。

 *remark* (与连续 Ricci flow 的关系). Hamilton 的连续 Ricci flow $\partial_t g_{ij} = -2 \text{Ric}_{ij}$ 是用一个偏微分方程把度量“磨平”到常曲率；本文的组合 Ricci flow 是它在“曲面 + 胞腔分解 + 圆图案”这一离散对象上的对应版本，退化为一个 $\mathbb{R}^{|V|}$ 上的常微分方程系统。两者的精神是一致的：用曲率作为速度驱动度量，让曲率向预定常数靠拢。

2.2 这篇论文有什么用？

(1) 对纯数学的意义.

- 在已有的“变分法”路线 (Bobenko–Springborn / Guo) 之外，提供了“动力学/ODE”路线，把 Chow–Luo 的组合 Ricci 流框架 推广到有间隙的 *ideal* 设定；
- 由此重新统一证明了 **Rivin 1996** 与 **Bobenko–Springborn 2004** 两个经典定理；
- 提供的方法可移植：论文方法已经被推广到 Calabi flow、inversive distance circle packing、 R -curvature flow 等其它离散几何对象。

(2) 对计算/算法的意义.

- 变分法只能保证“存在”极小点，但不告诉你怎么找；而 Ricci 流给出一个指数收敛的 ODE，可以直接用 Euler / Runge–Kutta 求解；
- 由此得到一个真正可以跑数值的方法来构造给定组合数据的 *ideal* 双曲多面体、平面 *ideal circle pattern*；
- 这与计算共形几何 (*computational conformal geometry*)、保形参数化 (*conformal parameterization*)、网格生成、3D 模型分析等工程应用直接相关——丘成桐、顾险峰等人一系列工作正是基于这种“离散 Ricci flow”框架。

- (3) **对三维拓扑/几何的意义.** Thurston 的几何化纲领关心 3-流形的常曲率结构；ideal 双曲多面体是构造 3-流形（如理想四面体粘合）的基本积木。本文给出了“给定二面角找 ideal 多面体”的算法版回答，因此可以看作几何化纲领的算法落地工具之一。

2.3 为什么这是“离散分析”的内容？与图论的联系

“离散分析 (discrete analysis)”关心把分析学 (微积分、偏微分方程、变分法、谱理论) 的工具应用到离散结构 (图、单纯复形、网络) 上。本论文是这一思想的一个典型样例：

连续分析	对应的离散版本 (本文)	对象
黎曼度量 g	半径向量 $r \in \mathbb{R}_+^{ V }$	几何
Ricci 曲率张量 Ric	顶点曲率 $K_i = 2\pi - (\text{cone angle})$	曲率
Ricci flow PDE	组合 Ricci flow ODE	演化方程
能量泛函 / Yamabe 泛函	势函数 $\Phi(u) = \int \omega$	变分
$\int K dA = 2\pi\chi$ (G-B)	$\sum_i K_i = 2\pi\chi(S)$	全局守恒
PDE 的最大原理	离散 Lyapunov / ODE 最大原理	分析工具

与图论的具体联系. 论文里的所有“几何对象”其实都完全由一个图 (以及它在曲面上的嵌入) 决定：

1. **1-skeleton 就是一个图.** 胞腔分解 $\mathfrak{D} = (V, E, F)$ 的 1-骨架 (V, E) 就是一张 嵌入在曲面 S 上的平面图 / 曲面图。所有曲率、半径都按图的顶点和边组织。
2. **条件 (C1)、(C2) 都是图上的代数条件.**

- (C1): 对每个面 $\tau \in F$, 边上的角度和 $= (m-2)\pi$;
- (C2): 对每条伪 Jordan 闭曲线 (图上的特殊圈), 角度和 $< (s-2)\pi$.

这两条都是“边权 Θ 在图的某些子结构 (面、环路) 上的求和不等式”，属于纯图论语言。

3. **prismatic s -circuit 是对偶图上的圈.** Rivin 定理里的“棱柱型 s -回路”就是“对偶图 G^* 中一条简单闭曲线，且这条圈不围出 G^* 的一个面”——完全是图论 + 平面对偶 (planar duality) 的概念。
4. **曲率映射 Th 是图上的一个非线性映射.** $\text{Th} : \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$ 把顶点上的半径函数映成顶点上的曲率函数；它的 Jacobian $\partial K_i / \partial u_j$ 在 v_i, v_j 不相邻时为 0 (局部性!)，所以恰好可以用**加权图 Laplacian**的语言来分析。流的指数收敛速度 c_1 由这个“图 Laplacian”的**谱隙 (spectral gap)**决定。(这条留到 Part V-1 详细讲。)
5. **Proposition 1.6 = 图上的离散 Gauss–Bonnet.** 它把一个顶点子集 $A \subseteq V$ 周边的角度求和改写为“ A 的链环 $Lk(A)$ ”上的角和加上“ A 周围子复形 $S(A)$ ”的 Euler 数 $\chi(S(A))$ 。这是 $|A| - |E_A| + |F_A| = \chi(S(A))$ (图上的 Euler 公式) 的等价变形，可以看成离散版本的 Gauss–Bonnet 公式。

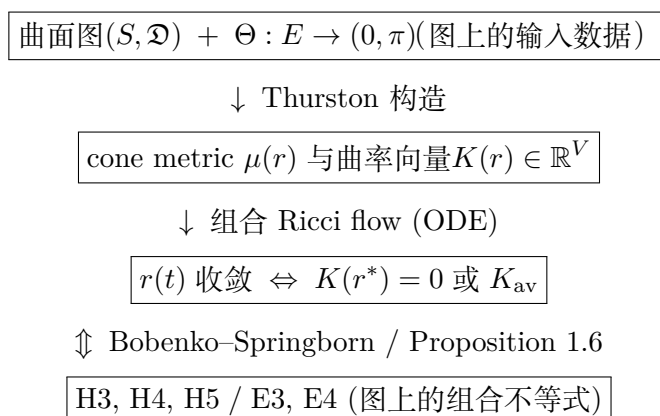
离散分析的“三件套”。

1. **离散几何对象**：曲面 + 胞腔分解 + 半径向量；
2. **离散分析工具**：势函数 Φ (变分)、组合 Ricci 流 (动力学)、离散 Gauss–Bonnet (拓扑约束)；
3. **离散组合刻画**：H1–H5、E1–E4、Rivin / BS 不等式。

论文的精彩之处正是这三件套严格等价——“几何能不能实现”=“ODE 能不能收敛”=“图上的组合不等式”。

 *remark* (课程视角下的“一句话总结”)。本文把“在曲面图上画 *ideal* 圆图案”这个几何问题，通过“顶点半径 $\rightarrow$ 顶点曲率”的非线性映射 Th 转写为图上的离散 ODE 系统，然后用凸势函数 + Lyapunov + 图 Laplacian 谱估计 证明它收敛 $\Leftrightarrow$ 图上的纯组合不等式成立。这是“离散分析”课程的范式样例。

2.4 论文的逻辑结构图



3 Part I: 对应论文 Section 1 (引言、定义、主结果) (约 15 min)

3.1 讲解目标

讲完这一段，听众应该能回答：

1. *circle pattern* 是什么、为什么数学家关心它？
2. 它和 3-维双曲多面体有什么关系？
3. 本文要解决一个什么具体问题？

答：(1) *circle pattern* 是“由图控制相交关系、由边权控制相交角”的圆系，连接二维共形几何与三维双曲几何；(2) 它与理想凸双曲多面体一一对应（圆的外交角对应面的二面角）；(3) 本文回答“何时存在 + 如何算法构造”，并证明 Ricci 流收敛与组合条件等价。

3.2 讲解要点

(1) 从 **Koebe–Andreiev–Thurston 讲起**. 在曲面（球面、平面、双曲面）上画一族圆，要求它们在指定的组合方式下相交，并且相交角度也是给定的，问“这样的圆图案能否实现？”这是 **Circle Pattern Theorem** 关心的问题（参考论文 Section 1.1）。

(2) 与 **3-维双曲多面体的关系**.

Thurston 观察到：

- 给定 $\mathbb{B}^3$ 中的一个凸双曲多面体 P ；
- 每个面所在的双曲平面在球面 $\partial\mathbb{B}^3$ 上对应一个圆盘；
- 这些圆的相交角度 = 多面体相邻面的二面角。

所以“在球面上找符合条件的 *circle pattern*”与“找符合条件的双曲多面体”是同一件事。特别地，理想多面体 $\leftrightarrow$ ideal circle pattern.

(3) **本文研究的问题**.

给定曲面 S 上的一个胞腔分解 $\mathfrak{D}$ 和边权 $\Theta : E \rightarrow (0, \pi)$,

- (a) 是否存在以 Θ 为外交角的 ideal $\mathfrak{D}$ -型 circle pattern?
- (b) 如何 算出来?

答：第一问：当且仅当对应的 Rivin / Bobenko–Springborn 型组合不等式成立；第二问：解本文定义的组合 Ricci 流，流收敛时半径极限 r^* 就给出目标图案，且收敛速度为指数级。以前的工作用变分法（Bobenko–Springborn 2004, Guo 2011）回答了存在性；本文给出一个 动力学/算法角度的回答：构造一个组合 Ricci 流，证明它收敛 $\iff$ 圆图案存在，并且指数收敛。

(4) **Slide 一句话总结：**

把“存在 *ideal circle pattern*”这个 静态几何问题 变成“一个 ODE 长时间收敛”这个 动态分析问题，顺便得到一个数值算法。

3.3 I-1. 论文 Section 1 的定义与条件总表（先统一符号）

Definition 3.1 (Definition 1.1: ideal circle pattern). $\mathfrak{D}$ -型 *circle pattern* 称为 *ideal*, 当且仅当：

1. *interstices* 与 *2-cells* 一一对应；
2. 每个 *interstice* 退化为一个点。



Definition 3.2 (Section 1 的核心对象). • 边权（外交角函数） $\Theta : E \rightarrow (0, \pi)$ ；

- 曲率映射 $\text{Th} : r \mapsto K(r)$ ；



- 双曲流 (6): $\dot{r}_i = -K_i \sinh r_i$;
- 欧氏流 (7): $\dot{r}_i = (K_{\text{av}} - K_i)r_i$, 其中 $K_{\text{av}} = \frac{2\pi\chi(S)}{|V|}$ 。



必须先写清楚的条件（按论文记号）

- (C1) 对每个 2-cell 边界 $e_1, \dots, e_m$:

$$\sum_{l=1}^m \Theta(e_l) = (m-2)\pi.$$

- (C2) 对每条不是 2-cell 边界的 pseudo-Jordan 曲线 $e_1, \dots, e_s$:

$$\sum_{l=1}^s \Theta(e_l) < (s-2)\pi.$$

- **H1–H5**: Theorem 1.7 的五条等价条件（双曲背景）。
- **E1–E4**: Theorem 1.8 的四条等价条件（欧氏背景）。
- **attainable 条件**: Section 3.4 / 4.4 中预设曲率向量 K 需要满足 Theorem 1.4 / 1.5 给出的像空间不等式系统（文中记作 (2)、(3)）。

答：讲的时候建议：先在一页里一次性列完 Definition 1.1 + (C1)(C2) + 两个流方程 + H/E 条件编号，后面每一节只“调用编号”，不重复写长句，听众会清楚很多。

3.4 I-2. 论文 Section 1.2: 已有存在性结果（严格同序时应放在这里）

Theorem 3.1 (Rivin, Theorem 1.2). $g = 0$ （球面 / 抽象多面体）时，*ideal* 凸双曲多面体存在 $\iff$ 顶点角和条件 + *prismatic s-circuit* 不等式成立。



Theorem 3.2 (Bobenko–Springborn, Theorem 1.3). $g \geq 1$ 时，*ideal* $\mathfrak{D}$ -型圆模式存在 $\iff$ (C1) 与 (C2) 成立。



Theorem 3.3 (Bobenko–Springborn, Theorem 1.4 / 1.5). 曲率映射 Th 的像由一组子集不等式刻画（双曲为严格不等式，欧氏为非严格并带缩放规范）。



答：这三条在论文中先出现，后续 Section 3/4 的 Ricci 流定理是在这个存在性框架上补上“动力学收敛等价 + 算法化构造”。

3.5 板书建议

- 画 1 张“双曲多面体 $\leftrightarrow$ 球面上 circle pattern”的对偶示意图；
- 画 1 张“一个亏格 $g \geq 1$ 曲面上的胞腔分解 + 圆图案”的示意图；

- 把 4 位关键作者按时间贴一张时间轴: Koebe (1936) $\rightarrow$ Andreev (1970) $\rightarrow$ Thurston (1978) $\rightarrow$ Rivin (1996) $\rightarrow$ Bobenko–Springborn (2004) $\rightarrow$ Chow–Luo (2003) $\rightarrow$ **Ge–Hua–Zhou (2021)**。

4 Part II: 对应论文 Section 2 (预备定义与几何背景) (约 35 min)

这一部分是讨论班的关键，因为后面所有内容都建立在这些定义上。建议按下面 8 个小段依次讲，每讲完一个小段就抽 30 秒做一个小图示或例子。

4.1 II-0. 拓扑预备：同胚、同痕（同伦）、亏格（按需 6 min）

Definition 4.1 (同胚 (homeomorphism)). 两个拓扑空间 X, Y 若存在双射 $f: X \rightarrow Y$, 且 f, f^{-1} 都连续, 则称 X, Y **同胚**, 记作 $X \cong Y$ 。



答：同胚表示“拓扑上一样”：允许拉伸、弯曲，但不允许撕裂和粘连。比如咖啡杯与甜甜圈同胚。

Definition 4.2 (同痕（通常称同伦, homotopy）). 设 $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ 是两个连续映射。若存在连续映射

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y, \quad H(x, 0) = f_0(x), \quad H(x, 1) = f_1(x),$$

则称 f_0 与 f_1 **同痕/同伦**。



答：同痕表示“可以连续变形过去”。在本报告里可把它理解成：曲线能否在曲面上不剪断地缩到一点，这和 pseudo-Jordan 条件、“是否围出单连通区域”的直觉是同一类问题。

Definition 4.3 (亏格 (genus)). 闭可定向曲面的亏格 g 可直观理解为“把手个数”。其 Euler 示性数满足

$$\chi(S) = 2 - 2g.$$



答：常见例子：球面 $g = 0, \chi = 2$ ；环面 $g = 1, \chi = 0$ ；双环面 $g = 2, \chi = -2$ 。论文里大量条件都通过 $\chi(S)$ 出现，所以亏格决定了全局拓扑预算。

4.2 II-1. 胞腔分解 (cellular decomposition) (5 min)

Definition 4.4 (k -cell). k -cell 是与 $\mathbb{R}^k$ 中开球同胚的拓扑空间。

- 0 -cell = 一个点；
- 1 -cell = 一段开区间（开边）；
- 2 -cell = 一个开圆盘（开面）。



Definition 4.5 (胞腔分解). 空间 X 的 **胞腔分解** (*cellular decomposition*) 是把 X 写成若干互不相交的 *cell* 的并, 并且满足一定的粘合规则。



Exercise 4.1. 四面体的表面就是球面 S^2 的一个最简单的胞腔分解: 4 个 0-cell、6 个 1-cell、4 个 2-cell.



讲法提示: 这里只需要让大家有“把曲面像 lego 一样切碎”的直观, 不必引入 CW-复形的所有细节。

4.3 II-2. 三角剖分 $T(\mathfrak{D})$ 、primal/star vertices (4 min)

为了把“面上的圆图案”处理成“三角形上的几何”, 论文对 $\mathfrak{D}$ 做一次细分:

Definition 4.6 ($T(\mathfrak{D})$). 对 $\mathfrak{D}$ 中每个二维胞腔 τ 在其内部添一个 *star vertex*, 并把它与 τ 的所有顶点连起来。得到的三角剖分记为 $T(\mathfrak{D})$.

原来的顶点称为 *primal vertex*, 新增的称为 *star vertex*.



为什么这样做? 答: 因为后续的 Thurston 构造是按三角形逐块赋予几何数据 (边长由 r_i, r_j, Θ_{ij} 决定) 并再粘合成 cone metric; 若不先细分为三角剖分, 就无法逐块定义与拼接。

4.4 II-3. circle pattern 与 ideal circle pattern (6 min)

Definition 4.7 ($\mathfrak{D}$ -型 circle pattern). 设 S 是带常曲率度量 μ 的曲面, $\mathfrak{D}$ 是它的胞腔分解。 $\mathfrak{D}$ -型 *circle pattern* $\mathcal{P} = \{C_v\}_{v \in V}$ 是 (S, μ) 上的一族圆:

- 每个 C_v 的圆心正好是 $\mathfrak{D}$ 的顶点 v ;
- 当且仅当 $\mathfrak{D}$ 中存在边 $[u, v]$ 时, $C_u \cap C_v \neq \emptyset$.



每条边 $e = [u, v]$ 对应一个 **外交角** (*exterior intersection angle*) $\Theta(e) \in [0, \pi)$.

Definition 4.8 (interstice). 设 D_v 是 C_v 围成的开圆盘, 则集合 $S \setminus \bigcup_v \overline{D_v}$ 的每个连通分支称为 *interstice* (间隙) .



Definition 4.9 (Ideal circle pattern). $\mathfrak{D}$ -型 *circle pattern* $\mathcal{P}$ 称为 *ideal* (理想), 若

1. *interstice* 与 $\mathfrak{D}$ 的 2-cell 一一对应;
2. 每个 *interstice* 只是一个点.



普通圆模式 (non-ideal) 与理想圆模式 (ideal) 的详细理解

Definition 4.10 (普通圆模式 (相对于 ideal 的说法)). 若只要求“圆心对应顶点 + 相邻性对应边 + 外交角由 Θ 给定”, 但不要求 *interstice* 退化为点, 则称为这里的“普通” $\mathfrak{D}$ -型圆模式。此时 *interstice* 一般是有面积的小区域 (常见为曲边多边形状)。



答: 可以把普通圆模式想成“圆之间留缝”, 把理想圆模式想成“缝被压扁到点”。因此 ideal 是 ordinary 的一个极限/边界情形。

比较项	普通圆模式	理想圆模式
interstice 形状	一般是二维区域 (有面积)	每个 interstice 退化为一个点
局部约束强度	仅给定 Θ 通常不足以完全锁死缝隙形状, 还含额外模量自由度	退化条件把局部自由度大幅压缩, 得到刚性更强的模型
与条件 (C1) 的关系	通常不强制满足本文这种等式型 (C1)	必须满足 (C1): 每个 face 边界角和 $= (m - 2)\pi$
几何直观	“留白”的圆图案	“无缝”的圆图案 (缝缩到理想点)
与本文关系	作为背景理解, 本文不以它为主对象	本文主对象: 所有主定理都在 ideal 设定下叙述

 *remark* (为什么论文专注 ideal?). *ideal* 设定把几何可实现性更直接地翻译成组合不等式与曲率方程, 从而 Ricci 流的“收敛 $\Leftrightarrow$ 存在”结构最清晰; 这正是本文主线。

讲法提示: 画一张图: 相邻三个圆两两相交, 把中间的“缝”收成一个点 $\Rightarrow$ 这就是“ideal”。“ideal”这个名字来自双曲几何里的“ideal point” (在无穷远处)。

 *remark* (如何理解 ideal (给初学者的三层直觉)). 1. **组合层**: 每个 2-cell 对应一个 *interstice*, 而且 *interstice* 不再有面积, 只剩一个顶点型对象。

2. **几何层**: 这些“点状间隙”对应双曲几何的理想点 (在边界无穷远处)。

3. **分析层**: *ideal* 条件把局部角度约束压成代数条件 (C1), 从而能进入 Ricci 流/变分框架。

 *remark* (条件 (C1) 的来源). 若 Θ 是某个 *ideal* 圆图案的外交角函数, 则对 $\mathfrak{D}$ 中每个 2-cell 的边界 $e_1, \dots, e_m$ 必有

$$(C1) \quad \sum_{l=1}^m \Theta(e_l) = (m - 2)\pi.$$

这是“ideal”要求 *interstice* 缩成一个点的代数表达。在黑板上做一遍“ $m = 3$ (三个圆两两相切于一点)”的小验证即可。

4.5 II-4. 双曲几何小回顾 (4+3 min)

听众可能没学过双曲几何, 但只需要记住下面两件事就够用:

1. **双曲三角形** 的角度和 $< \pi$;

2. 双曲余弦定理:

$$\cosh l_{ij} = \cosh r_i \cosh r_j + \sinh r_i \sinh r_j \cos \Theta_{ij},$$

在 $r_i, r_j \rightarrow 0$ 时退化为欧氏余弦定理

$$l_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j \cos \Theta_{ij}.$$

再补充四条常用知识 (建议板书)

1. **测地线模型**: 在 Poincaré 圆盘模型里, 测地线是与边界圆正交的圆弧 (或过圆心的直径)。
2. **理想点**: 圆盘边界 $\partial\mathbb{D}$ 不是内部点, 但可作为“无穷远方向”, 这正是 ideal 一词来源。
3. **面积-角亏公式** (曲率归一化为 -1): 若三角形内角为 α, β, γ , 则

$$\text{Area}(\triangle) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

所以角和越小, 三角形越“大”。

4. **理想三角形**: 三个顶点都在无穷远时, 角和为 0, 面积恰为 π 。

讲法提示: 直接告诉听众“双曲是负曲率, 欧氏是零曲率, 球面是正曲率”。不需要讲 Poincaré 盘模型, 只需要接受一个双曲三角形可以由两边夹角唯一确定, 并满足上面那条余弦律即可。

4.6 II-5. cone metric (圆锥度量) (3 min)

Definition 4.11 (cone metric). 把若干个常曲率 (双曲 / 欧氏 / 球面) 三角形沿公共边粘起来, 得到一个曲面 S 上的度量。这个度量在三角形内部是光滑的, 但是在顶点处可能出现锥尖奇性: 顶点处的 **锥角 (cone angle)** 等于所有以这个顶点为顶点的三角形内角之和。



Definition 4.12 (vertex curvature). 对每个顶点 v_i , 定义

$$K_i = 2\pi - (v_i \text{ 处的锥角}).$$



- $K_i = 0 \iff$ 在 v_i 处的 cone metric 是光滑的;
- $K_i \neq 0 \iff v_i$ 是一个锥尖。

怎么理解 cone angle (建议讲 2 分钟)

1. **局部拼角度的总和**: 在顶点 v_i 周围, 把所有以 v_i 为顶点的小三角形内角加起来, 这个总和就是 cone angle, 记作 α_i 。
2. **与平面 2π 比较**:

$$\alpha_i < 2\pi \Rightarrow \text{尖锥 (正曲率)}, \quad \alpha_i = 2\pi \Rightarrow \text{局部平滑}, \quad \alpha_i > 2\pi \Rightarrow \text{鞍锥 (负曲率)}.$$

3. **纸模型直观**: 把若干扇形纸片在顶点处粘起来。若总角度少于一整圈会“拱起来”成尖; 若多于一整圈会“起褶”成鞍; 刚好一整圈就能平铺。

4. **本文的曲率定义**: $K_i = 2\pi - \alpha_i$, 所以

$$K_i > 0 \Leftrightarrow \alpha_i < 2\pi, \quad K_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 2\pi, \quad K_i < 0 \Leftrightarrow \alpha_i > 2\pi.$$

Ricci 流就是不断调半径 r_i , 把这些角度缺陷 K_i 推向目标值。

答: 一句话记忆: cone angle 是“顶点周围总共转了多少角度”, 而 $K_i = 2\pi - \text{cone angle}$ 就是离平滑程度的偏差。

4.7 II-6. Ricci flow: 从经典到组合 (8 min) [关键补充]

由于很多听众不熟悉 “Ricci flow”, 这里要从经典版本快速过渡到组合版本。

II-6.1 经典 Ricci flow (Hamilton 1982)

对一个黎曼流形 (M, g) , Hamilton 引入演化方程

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2 \text{Ric}_{ij}(g),$$

意思是“曲率大的地方让度量收缩、曲率小的地方让度量膨胀”, 从而把度量逐渐磨平。Perelman 用它证了 3-维 Poincaré 猜想。

II-6.2 组合 Ricci flow (Chow–Luo 2003)

在离散的情形 (曲面上的三角剖分 / 圆填充 / 圆图案), 我们没有“黎曼度量”这个连续对象, 但有:

- 每个顶点 v_i 有一个半径 r_i (决定度量);
- 每个顶点有一个曲率 K_i (决定与“光滑”的偏差)。

Chow–Luo 提出离散版本:

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i \cdot (\text{某个正函数}).$$

思想完全一样: 曲率大的地方让 r_i 变小 / 度量收缩, 使得 $K_i \rightarrow 0$ (或其它目标值)。

II-6.3 本文用的两个组合 Ricci 流

Definition 4.13 (本文使用的组合 Ricci flow).

• **双曲背景**:

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i \sinh r_i, \quad i = 1, \dots, |V|.$$

• **欧氏背景**:

$$\frac{dr_i}{dt} = (K_{\text{av}} - K_i) r_i, \quad K_{\text{av}} := \frac{2\pi\chi(S)}{|V|}.$$



II-6.4 如何理解 Ricci 流 (连续/离散统一视角)

1. **一句话**: Ricci 流就是“用曲率误差驱动度量更新”的负反馈系统。
2. **连续曲面直观**: 在二维里 $\text{Ric} = K g$, 所以 (规范化后) 可写成 $\partial_t g = -2(K - \bar{K})g$, 目标是把曲率拉回平均值附近。
3. **离散版本直观**: 把“度量”换成顶点半径向量 r , 把“曲率”换成顶点角缺 K_i , 得到有限维 ODE; 这本质上是梯度下降/Lyapunov 下降过程。
4. **为什么它好用**: 既给存在唯一性结论, 也给可计算算法 (数值积分即可逼近目标图案)。

答: 可以把它类比成自动调参: 某点曲率偏大就往反方向改半径, 偏差越大改得越快, 最终把全局误差压到零 (双曲) 或压到常数目标 (欧氏)。

讲法提示: 这里画“若 $K_i > 0$ (锥角偏小、太尖), r_i 要变小”这种箭头图, 对听众理解流的几何意义非常关键。

4.8 II-7. prismatic s -circuit 与 pseudo-Jordan 曲线 (5 min)

为了写 Rivin / Bobenko–Springborn 定理, 需要两个 纯组合 的概念。

Definition 4.14 (prismatic s -circuit). 给定抽象多面体 P , 对偶多面体 P^* . 一组边 $\{e_1, \dots, e_s\} \subset P$ 称为 **prismatic s -circuit (棱柱型 s -回路)**, 如果它们的对偶边 $\{e_1^*, \dots, e_s^*\}$ 在 P^* 中构成一条简单闭曲线, 且这条曲线不是 P^* 中任何一个面的边界。

 **remark.** 直观: “绕过去但不绕过某一个面”。在三棱柱中, 连接两个三角形面的 3 条侧边构成一个 prismatic 3-circuit.

Definition 4.15 (pseudo-Jordan 曲线). S 中的闭曲线 γ (不必简单) 称为 **pseudo-Jordan (伪-Jordan)**, 如果 $S \setminus \gamma$ 包含一个 单连通 连通分支, 且该分支的边界恰好等于 γ .

讲法提示: 在亏格 $g = 0$ (球面) 情形, pseudo-Jordan = 普通 Jordan, 是 Rivin 定理中的 prismatic 概念在高亏格曲面上的推广。

5 Part III: 对应论文 Section 2 (Thurston 构造、曲率映射、关键引理) (约 20 min)

5.1 III-1. Thurston 构造 (详细版): 从 r 到 $\mu(r)$ 与 $K(r)$

输入数据 (固定不动)

- 曲面胞腔分解 $\mathfrak{D} = (V, E, F)$;

- 边权 $\Theta : E \rightarrow (0, \pi)$ (满足 (C1));
- 细分三角剖分 $T(\mathfrak{D})$ (每个 face 加一个 star vertex)。

可变数据 (Ricci 流会更新)

$$r = (r_1, \dots, r_{|V|}) \in \mathbb{R}_+^{|V|}.$$

每个 primal vertex v_i 对应一个半径 r_i 。

构造流程 (建议按这 8 步讲)

Step 1. 取 $T(\mathfrak{D})$ 中任意一个小三角形 $(v_i v_j \tau)$, 其边 (v_i, v_j) 对应外交角 Θ_{ij} 。

Step 2. 在对应背景几何 (双曲/欧氏) 里画两圆: 圆心分别为 v_i, v_j , 半径分别为 r_i, r_j , 且两圆外交角为 Θ_{ij} 。

Step 3. 取两圆心和一点, 得到局部几何三角形 $\triangle_{ij\tau}$ 。

Step 4. 该三角形边长由两半径和 Θ_{ij} 唯一决定:

$$\begin{cases} l_{ij}^{\text{hyp}} = \cosh^{-1}(\cosh r_i \cosh r_j + \sinh r_i \sinh r_j \cos \Theta_{ij}), \\ l_{ij}^{\text{euc}} = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j \cos \Theta_{ij}}. \end{cases}$$

Step 5. 对所有小三角形重复此过程, 得到一组局部三角形片。

Step 6. 按 $T(\mathfrak{D})$ 的组合邻接关系沿等长公共边粘合, 得到曲面上的分片常曲率度量 $\mu(r)$ (即 cone metric)。

Step 7. 计算每个 primal vertex 的锥角 $\alpha_i(r)$, 定义离散曲率

$$K_i(r) := 2\pi - \alpha_i(r).$$

Step 8. 于是得到曲率映射 $\text{Th} : r \mapsto K(r)$; Ricci 流就是在 r 空间里驱动 $K(r)$ 逼近目标值。

为什么 (C1) 在这里关键?

- 对每个 star vertex τ , 其周围角和是

$$\sum_{e \subset \partial\tau} (\pi - \Theta(e)) = m\pi - \sum_{e \subset \partial\tau} \Theta(e) = m\pi - (m-2)\pi = 2\pi.$$

- 所以 star vertices 自动无奇性, 奇性只可能出现在 primal vertices。

答: Thurston 构造的本质是: 把“圆模式是否存在”翻译为“是否存在 r 使 $K(r)$ 命中目标向量”。这一步把几何存在性问题完全转成有限维非线性映射问题。

5.2 III-2. 曲率映射 Th

Definition 5.1 (curvature map).

$$\text{Th} : \mathbb{R}_+^{|V|} \rightarrow \mathbb{R}^{|V|}, \quad r \mapsto (K_1(r), \dots, K_{|V|}(r)),$$

其中 $K_i = 2\pi - (v_i \text{ 的锥角})$.



核心翻译：

存在 **ideal circle pattern** $\iff 0 \in \text{Im}(\text{Th})$ (双曲情形)

存在 **ideal circle pattern** $\iff (K_{\text{av}}, \dots, K_{\text{av}}) \in \text{Im}(\text{Th})$ (欧氏情形)

5.3 III-3. 两圆构型的关键引理 (Lemma 2.2)

这是后面 所有凸性 / 收敛性论证的源头。

Lemma 5.1 (Lemma 2.2, 本文 §2). 固定 $\Theta_k \in (0, \pi)$. 对两圆构型中两个圆心处的内角 ϑ_i, ϑ_j :

- **欧氏几何：** $\frac{\partial \vartheta_i}{\partial r_i} < 0, \quad r_j \frac{\partial \vartheta_i}{\partial r_j} = r_i \frac{\partial \vartheta_j}{\partial r_i} > 0.$
- **双曲几何：** $\frac{\partial \vartheta_i}{\partial r_i} < 0, \quad \sinh r_j \frac{\partial \vartheta_i}{\partial r_j} = \sinh r_i \frac{\partial \vartheta_j}{\partial r_i} > 0, \quad \frac{\partial \text{Area}}{\partial r_i} > 0.$



两个推论 一定要在黑板上强调：

1. **对称性** $\Rightarrow$ 1-form $\omega = \sum K_i du_i$ 是 闭的，所以可以定义 **势函数** $\Phi(u) = \int \omega$.
2. **单调性** + Hessian 对称 $\Rightarrow \Phi$ 是 **严格凸** 的 (Bobenko–Springborn 2004; Guo 2011 的另证)。

讲法提示： 这就是“变分法路线”的入口；本文虽然走的是“ODE 路线”，但 ODE 的 Lyapunov 函数正是这个 Φ .

6 Part IV：对应论文 Section 3–4 (双曲/欧氏 Ricci 流主结果) (约 30 min)

6.1 IV-1. (对应论文 Section 3) 主定理 Theorem 1.7 (双曲背景, 10 min)

Theorem 6.1 (Theorem 1.7). 假设 $\Theta : E \rightarrow (0, \pi)$ 满足 (C1). 在双曲背景下，对组合 Ricci 流

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i \sinh r_i$$

任意正初值都对 $t \geq 0$ 全时间存在；且下面 **五条等价**：

H1 $r(t)$ 在 $t \rightarrow +\infty$ 时收敛；

H2 $0 \in \text{Im}(\text{Th})$ (即存在 r^* 使 $K_i(r^*) = 0$)；



H3 对任意非空 $A \subseteq V$, $\sum_{\substack{e \in E \\ \partial e \cap A \neq \emptyset}} \Theta(e) > \pi|A|$;

H4 对任意非空 $A \subseteq V$, $\sum_{(e, \tau) \in Lk(A)} (\Theta(e) - \pi) + 2\pi\chi(S(A)) < 0$;

H5 $g > 1$ 且对每条不是 2-cell 边界的 pseudo-Jordan 曲线 $e_1, \dots, e_s$, $\sum_l \Theta(e_l) < (s-2)\pi$ (即 (C2)).

若流收敛, 则 **指数收敛** 到使所有 $K_i = 0$ 的唯一 r^* .



讲解节奏建议:

1. 先把 H1-H5 原样写到黑板上, 让大家看清楚“它们都在说同一件事”;
2. 然后说明等价链条的逻辑骨架:

$$\underbrace{H1 \Leftrightarrow H2}_{\text{Ricci 流分析}} \Leftrightarrow \underbrace{H3}_{\text{Thm 1.4 的不等式}} \Leftrightarrow \underbrace{H4}_{\text{Proposition 1.6 改写}} \Leftrightarrow \underbrace{H5}_{\text{组合论证}}.$$

3. 强调 “H1 $\Leftrightarrow$ H2” 是本文的新贡献, 其它三个等价基本属于已有工作。

6.2 IV-2. (对应论文 Section 4) 主定理 Theorem 1.8 (欧氏背景, 5 min)

Theorem 6.2 (Theorem 1.8). 假设 Θ 满足 (C1). 令 $K_{\text{av}} = \frac{2\pi\chi(S)}{|V|}$. 对欧氏背景下的组合 Ricci 流

$$\frac{dr_i}{dt} = (K_{\text{av}} - K_i) r_i,$$

任意正初值都全时间存在; 且下面 **四条等价**:

E1 $r(t)$ 收敛;

E2 $(K_{\text{av}}, \dots, K_{\text{av}}) \in \text{Im}(\text{Th})$;

E3 对任意 $\emptyset \neq A \subsetneq V$, $\pi\chi(S)\frac{|A|}{|V|} > \pi|A| - \sum_{\partial e \cap A \neq \emptyset} \Theta(e)$;

E4 对任意 $\emptyset \neq A \subsetneq V$, $\frac{2\pi\chi(S)|A|}{|V|} > \sum_{(e, \tau) \in Lk(A)} (\Theta(e) - \pi) + 2\pi\chi(S(A))$.

若流收敛, 则 **指数收敛** 到使每个 $K_i = K_{\text{av}}$ 的 r^* .



讲法提示: 欧氏情形和双曲情形的差别要点出来:

- 欧氏情形 $\sum_i K_i = 2\pi\chi(S)$ 是“固定预算”, 所以目标只能是 **均匀分配**;
- 双曲情形可以“真正光滑”, 目标是 **全 0**;
- 欧氏情形流保持 $\prod_i r_i = \text{常数}$ (缩放不变性), 相当于已经固定了一个 gauge.

6.3 IV-3. (对应 Section 3.4 / 4.4) 推广: 指定曲率的 ideal circle pattern (5 min)

Theorem 6.3 (Theorem 3.7 / 4.5). 把流改成

$$\frac{dr_i}{dt} = (k_i - K_i) \sinh r_i \quad \text{or} \quad \frac{dr_i}{dt} = (k_i - K_i) r_i,$$

其中 $K = (k_1, \dots, k_{|V|})$ 是一个 prescribed 向量 (在欧氏情形下要求 $\sum k_i = 2\pi\chi(S)$), 则

- 流全时间存在;
- 流收敛 $\iff K$ attainable (满足相应的 BS 不等式);
- 收敛时为指数收敛。



讲法提示: 一句话带过即可, 目的是让听众知道“主定理 1.7 / 1.8 是一个统一框架的特例”。

7 Part V: 对应论文 Section 5 (restriction flow 与 Rivin 算法证明) (约 15 min)

7.1 V-1. Section 5: restriction Ricci 流与 Rivin 定理 (先按论文顺序讲, 6 min)

1. 先固定一个“无穷远面” $\tau_\infty \subset \mathfrak{D}$, 把其顶点放到无穷远 (球极投影下对应直线边界)。
2. 对剩余自由顶点定义 restriction Ricci 流

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i r_i, \quad i = m+1, \dots, |V|.$$

3. 在限制子空间重复 Section 3/4 的核心工具链: 闭 1-形式 $\rightarrow$ 势函数严格凸 $\rightarrow$ Lyapunov 单调下降。
4. 得到“流收敛 $\iff$ Rivin 棱柱条件”, 从而给出 Rivin 定理的算法化证明。

7.2 V-2. 附录工具 Proposition 1.6 (放在 Section 5 之后讲, 4 min)

Proposition 7.1 (Proposition 1.6). 若 Θ 满足 (C1), 则对每个非空 $A \subseteq V$,

$$2\pi|A| - 2 \sum_{\substack{e \in E \\ \partial e \cap A \neq \emptyset}} \Theta(e) = \sum_{(e, \tau) \in Lk(A)} (\Theta(e) - \pi) + 2\pi\chi(S(A)).$$



答: 这条恒等式在讲稿里作为“统一换元工具”: 它把 H3/E3 的边和条件改写成 H4/E4 的 link+Euler 条件。

7.3 V-3. 证明骨架 (跨 Section 3/4 的总结, 8 min)

只讲思路, 不写细节。统一的证明模式如下。

Step 1. 变量替换.

双曲: $u_i = \ln \tanh(r_i/2) \in (-\infty, 0)$;

欧氏: $u_i = \ln r_i \in \mathbb{R}$.

则原 ODE 写成自治系统 $\frac{du_i}{dt} = -K_i$ (或 $K_{av} - K_i$)。

Step 2. 长时间存在性.

用 $|K_i|$ 一致有界 (依赖 $\mathfrak{D}$) $\Rightarrow u_i(t)$ 至多线性增长 $\Rightarrow r_i$ 不会触及 0 或 $+\infty$ 边界 (双曲情形再用 Lemma 2.3: r_i 很大时 $K_i > \pi$, 从而 r_i 自动下压)。

Step 3. 势函数 + Lyapunov 论证.

在变量 u 下定义 $\Phi(u) = \int \omega$, $\omega = \sum K_i du_i$ (或 $\sum (K_i - K_{av}) du_i$)。

- Lemma 2.2 $\Rightarrow \Phi$ 严格凸;
- 沿流 $\frac{d\Phi}{dt} = -\sum K_i^2 \leq 0$ (或 $-\sum (K_i - K_{av})^2$), 单调下降。

Step 4. 下界 $\Rightarrow$ 紧性 $\Rightarrow$ 收敛.

H2 / E2 (存在 r^*) $\Rightarrow \Phi$ 有下界 $\Rightarrow$ 轨道留在紧集 $\Rightarrow$ 收敛到 r^* 。

Step 5. 指数收敛.

对 $g(t) = \sum (K_i - K_{av})^2$ 求导, 用 Lemma 2.2 给出的 $\partial K_i / \partial u_j$ 一致负性 $\Rightarrow \frac{dg}{dt} \leq -c_1 g \Rightarrow g(t) \leq g(0)e^{-c_1 t}$, 再积分得 $|r_i(t) - r_i^*| \leq Ce^{-ct}$ 。

讲法提示: 这一段最好画一张“ Φ 是一个严格凸的碗, 轨道沿碗滑到底”的示意图。

7.4 V-4. 每个主结论的证明逻辑链 (可直接照讲, 6 min)**(A) Theorem 1.7 (双曲) 逻辑链****H-1. H2 $\Rightarrow$ H1 (存在解 $\Rightarrow$ 流收敛) :**

先做变量替换 $u_i = \ln \tanh(r_i/2)$, 把流写成 $\dot{u}_i = -K_i$; 再用 Lemma 2.2 得到闭 1-形式与严格凸势函数 Φ 。

沿流有 $\frac{d\Phi}{dt} = -\sum_i K_i^2 \leq 0$, 所以轨道向极小值下降。结合长时间存在与轨道紧性, 得 $u(t)$ 收敛到唯一临界点 u^* , 即 $K(u^*) = 0$ 。

H-2. H1 $\Rightarrow$ H2 (流收敛 $\Rightarrow$ 存在零曲率点) :

若 $r(t) \rightarrow r^\infty$, 则 $\dot{r}_i(t) \rightarrow 0$ 。由 $\dot{r}_i = -K_i \sinh r_i$ 且 $r_i^\infty > 0$, 立刻得 $K_i(r^\infty) = 0$, 故 $0 \in \text{Im}(\text{Th})$ 。

H-3. H2 $\Leftrightarrow$ H3:

由 Bobenko–Springborn 的像空间刻画 (Theorem 1.4), $0 \in \text{Im}(\text{Th})$ 等价于对应子集不等式族成立, 正是 H3。

H-4. H3 $\Leftrightarrow$ H4:

直接套 Proposition 1.6 的恒等式, 把“边和形式”改写为“link+Euler 数形式”, 两式逐项对应。

H-5. H4 $\Leftrightarrow$ H5:

这是组合拓扑翻译：把 $A \subseteq V$ 的 link 条件改写成伪 Jordan 曲线条件（论文附录给出细节），即 (C2)。

(B) Theorem 1.8 (欧氏) 逻辑链

E-1. **先规范化自由度**：欧氏有缩放不变性，先固定 $\prod_i r_i = \text{const}$ （等价于 $\sum_i u_i = \text{const}$ ）。

E-2. **E2 $\Rightarrow$ E1**：在该超平面上构造严格凸势函数 $\Phi_{\text{euc}}(u) = \int \sum_i (K_i - K_{\text{av}}) du_i$ ，沿流有 $\frac{d\Phi_{\text{euc}}}{dt} = -\sum_i (K_i - K_{\text{av}})^2 \leq 0$ ，故收敛到唯一平衡点。

E-3. **E1 $\Rightarrow$ E2**：若流收敛到 r^∞ ，由 $\dot{r}_i = (K_{\text{av}} - K_i)r_i \rightarrow 0$ 得 $K_i(r^\infty) = K_{\text{av}}$ 。

E-4. **E2 $\Leftrightarrow$ E3**：由 Theorem 1.5 的像空间刻画得到。

E-5. **E3 $\Leftrightarrow$ E4**：同样由 Proposition 1.6 的代数改写得到。

(C) Section 5 restriction Ricci flow 逻辑链

R-1. 先选定“无穷远面” τ_∞ ，把对应顶点固定在无穷远（等价于若干 $r_i = +\infty$ 的边界处理）。

R-2. 在其余自由顶点上定义 restriction flow: $\dot{r}_i = -K_i r_i$ 。

R-3. 在限制子空间重复“闭 1-形式 $\rightarrow$ 严格凸势函数 $\rightarrow$ Lyapunov 下降”三步。

R-4. 平衡点存在当且仅当 Rivin 的棱柱不等式成立，因此“流收敛”与“Rivin 条件”等价。

R-5. 收敛后恢复几何对象，得到理想多面体；因此 Rivin 定理获得算法化证明。

7.5 V-5. 算法意义 (3 min)

- 给定 $(\mathfrak{D}, \Theta)$ ，从任意正初值 $r(0)$ 出发数值求解 ODE；
- 若 H3 / E3 满足，则数值轨道 指数收敛到目标半径向量；
- 由此得到 ideal circle pattern 与 ideal 双曲多面体的具体构造方法。

8 完整时间表与板书安排

8.1 时间分配表

段	主题	核心内容	时长	累计
0	开场	介绍论文 / 目标	3 min	3 min
I	Sec.1 引言与主结果	Def 1.1 + (C1)(C2) + Thm 1.7/1.8	15 min	18 min
II-0	拓扑预备	同胚/同痕/亏格	6 min	24 min
II-1	胞腔分解	k -cell, $\mathfrak{D}$	5 min	29 min
II-2	三角剖分 $T(\mathfrak{D})$	primal / star vertex	4 min	33 min
II-3	circle pattern / ideal	interstice, (C1), ideal 直观	6 min	39 min
II-4	双曲几何回顾	余弦律, 角亏面积, ideal 三角形	7 min	46 min
II-5	cone metric, 顶点曲率	$K_i = 2\pi -$ 锥角	3 min	49 min
II-6	Ricci flow 补充	经典 $\rightarrow$ Chow–Luo $\rightarrow$ 本文	8 min	57 min
II-7	prismatic / pseudo-Jordan	组合限制条件	5 min	62 min
III-1	Thurston 构造 (详细)	半径 $r \rightarrow$ cone metric + 曲率向量	10 min	72 min
III-2	曲率映射 Th	存在性 $\leftrightarrow$ 像空间	5 min	77 min
III-3	Lemma 2.2 关键引理	凸性来源	7 min	84 min
IV-1	Sec.3: Theorem 1.7	H1–H5	10 min	94 min
IV-2	Sec.4: Theorem 1.8	E1–E4	6 min	100 min
IV-3	Sec.3.4/4.4	Theorem 3.7 / 4.5	5 min	105 min
V-1	Sec.5: Restriction + Rivin	算法证明 Rivin	6 min	111 min
V-2	附录: Proposition 1.6	连接 H3/H4 与 E3/E4	4 min	115 min
V-3	证明骨架	5-step 流程	5 min	120 min
V-4	主结论逻辑链	H/E/R 三条链	4 min	124 min
V-5	算法意义	数值实践	3 min	127 min
—	总结 + Q&A	一张图小结	8 min	135 min

说明：表中累计超出 120 min (约 135 min)，是“严格按论文顺序 + 定义补全版”的上限时长。若要严格控制在 120 min，可优先压缩 II-0 (6 min $\rightarrow$ 3 min) 与 V-4 (4 min $\rightarrow$ 2 min)，并把 V-3 的证明骨架从 5 min 压到 3 min。

8.2 板书 / Slide 分页建议

Slide 1. 标题页 + 论文信息.

Slide 2. 论文目录导航 (Section 1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 5) .

Slide 3. 一张 “ $P \subset \mathbb{B}^3 \leftrightarrow \partial\mathbb{B}^3$ 上 circle pattern” 大图.

Slide 4. 历史时间轴.

Slide 5. Section 1 的定义与条件总表: Definition 1.1, (C1), (C2), H1–H5, E1–E4.

- Slide 6.** 本文要回答的两个问题（存在性 + 算法）.
- Slide 7.** 同胚 / 同痕 / 亏格（速讲页）.
- Slide 8.** 胞腔分解的图示 + 定义.
- Slide 9.** $T(\mathfrak{D})$ 的图示（primal/star）.
- Slide 10.** circle pattern + interstice + ideal 直观.
- Slide 11.** 双曲三角形 + 余弦律 + 角亏面积.
- Slide 12.** cone metric + 顶点曲率公式.
- Slide 13. Ricci flow 三连图：**连续 $\rightarrow$ Chow–Luo $\rightarrow$ 本文（双曲 / 欧氏）.
- Slide 14.** prismatic / pseudo-Jordan 示意.
- Slide 15.** Thurston 构造 step-by-step（含两圆构型图）.
- Slide 16.** Lemma 2.2 与势函数 Φ 凸性.
- Slide 17.** 曲率映射 Th 与“翻译表”.
- Slide 18.** Section 1.2 回顾：Rivin / BS 经典定理.
- Slide 19. Section 3: Theorem 1.7** (H1–H5) .
- Slide 20. Section 4: Theorem 1.8** (E1–E4) .
- Slide 21.** Section 3.4 / 4.4: 指定曲率推广.
- Slide 22.** Section 5: Restriction flow + Rivin 算法证明.
- Slide 23.** 附录：Proposition 1.6 + Gauss–Bonnet.
- Slide 24.** 证明骨架 5 步 + “凸碗”示意.
- Slide 25.** 总结：“ODE 收敛 $\Leftrightarrow$ 组合不等式 $\Leftrightarrow$ 几何存在性” + 致谢.

9 需要补充讲解的概念清单（速查表）

下面是建议在 Part II 中 务必讲清楚的概念。若听众完全没背景，还可考虑在讨论班开始前以“预读材料”形式发出。

概念	要讲清的内容
k -cell, 胞腔分解	与 $\mathbb{R}^k$ 中开球同胚; 曲面上“由图导出的圆盘剖分”.
同胚 (homeomorphism)	“拓扑等价”: 可连续变形互相得到, 不允许撕裂/粘连; 用于说明对象的拓扑类型不变.
同痕/同伦 (homotopy)	两个映射或闭曲线可通过连续参数变形互相到达; 用于理解“是否可缩”与区域边界性质.
亏格 g 与 Euler 数	闭可定向曲面满足 $\chi(S) = 2 - 2g$; 球面 $g = 0$ 、环面 $g = 1$, 决定全局拓扑约束.
$T(\mathfrak{D})$	在每个 2-cell 内加 star vertex, 得到三角剖分; primal/star 区别.
circle pattern	一族圆, 圆心 = 顶点, 外交角 $\Theta(e)$.
普通 vs 理想圆模式	普通: interstice 为有面积区域; 理想: interstice 退化为点; ideal 可视作 ordinary 的边界情形.
ideal circle pattern	interstice 收为一个点; 对应双曲无穷远 ideal point; 导出条件 (C1).
C1 / C2 条件	(C1) 面边界角和 $= (m - 2)\pi$; (C2) pseudo-Jordan 曲线角和 $< (s - 2)\pi$.
双曲几何回顾	余弦律 (双曲 / 欧氏); 角和 $< \pi$; 面积 = 角亏; 理想三角形面积 π .
cone metric / 顶点曲率 (连续) Ricci flow	$K_i = 2\pi -$ 锥角; star vertex 处自动光滑. Hamilton: $\partial_t g = -2\text{Ric}$; 二维规范化可写 $\partial_t g = -2(K - \bar{K})g$.
组合 Ricci flow (Chow–Luo)	顶点上 r_i 的 ODE, 曲率作为速度.
本文使用的 Ricci flow H1–H5 / E1–E4	双曲: $dr_i/dt = -K_i \sinh r_i$; 欧氏: $dr_i/dt = (K_{\text{av}} - K_i)r_i$. 主定理等价条件编号; 讲解时建议保留原编号, 避免符号切换造成混乱.
prismatic s -circuit	对偶图中不绕面的简单闭曲线; Rivin 棱柱条件.
pseudo-Jordan 曲线	不必简单的闭曲线, 其补集有单连通分支以它为边界.
Euler 示性数 $\chi(S)$	球面 2、环面 0、 $g \geq 1$ 双亏面 $2 - 2g$.
势函数 Φ / Lyapunov 函数	沿流单调下降; 严格凸 $\Rightarrow$ 唯一极小 $\Rightarrow$ 收敛.

10 常见提问与备用回答

1. Q: 为什么叫 “ideal” ?

答: “ideal” 是双曲几何里的术语, 指无穷远上的点. 双曲多面体的顶点若都在无穷远 (即 $\partial\mathbb{B}^3$ 上) 就称为 ideal. 对应到 circle pattern, “间隙缩成一点” 就反映了这些 “无穷远顶点” 的存在.

2. Q: Ricci flow 不是一个 PDE 吗, 这里怎么变 ODE 了?

答: 因为离散几何对象只有有限多个“自由度”(每个顶点一个半径 r_i), 所以“Ricci flow”退化成了 $\mathbb{R}^{|V|}$ 上的 ODE。它的精神(曲率驱动度量变化)和经典 Ricci flow 完全一致。

3. Q: 为什么不直接用变分法?

答: 变分法 (Bobenko–Springborn / Guo) 已经能证明存在性; 但 Ricci 流额外给出 **算法** 和 **指数收敛速度**, 并且很多技巧(例如长时间存在性)可以推广到更一般情形(论文 Remark 3.4 强调过这点)。

4. Q: H3 / E3 那条不等式直观上是什么意思?

答: 它约束了每个顶点子集 A 的“角度通量预算”: 边界穿过 A 的总外交角必须落在可实现区间内, 否则局部几何会过度拥挤或过度稀疏, 无法拼成全局一致的 circle pattern。

5. Q: 为什么欧氏情形流要保持 $\prod r_i = \text{常数}$?

答: 欧氏几何有缩放对称性, r 和 λr 给出“相似”但不相等的 circle pattern。保持 $\prod_i r_i$ 不变等价于固定一个规范切片, 去掉 1 维缩放自由度; 这正对应 Theorem 1.5 的“缩放下唯一”。

11 讲完之后给听众的小结 (一张幻灯片)

Ge-Hua-Zhou 2021 的核心翻译

Ideal circle pattern 存在

$\iff$

组合 Ricci 流 $r(t)$ 收敛

$\iff$

Rivin / *BS* 型组合不等式成立

而且收敛 $\Rightarrow$ **指数收敛** $\Rightarrow$ 一个可实现的数值算法。
