

关于 Csaba 论文证明的理解、改进与思考

杨锐 2313878

2026 年 6 月 14 日

1 对本文证明的理解、改进与质疑

本文的证明分为三个阶段。首先将原图约化到一个最小诱导子图 G_1 ，从而获得 $\delta(G_1) \geq |V(G_1)|/4$ 的最小度条件。随后两次应用单侧的 ε^+ -regular pair 引理，依次抽出集合 A_1, A_2, A'_2, B_2, B_3 ，建立接近二分的结构。最后将剩余顶点分入 A, B 两侧，并通过内部度估计、短奇圈排除与对称化，将问题化为对内部图 $G'[M_A], G'[M_B]$ 的边数估计。

证明的主要结构性工作集中在前两个阶段：极小诱导子图提供统一的最小度条件，两次 one-sided regular pair 提取则建立近似二分结构。Step 5 中的代数计算是在这一结构基础上完成最终计数。

1.1 我对整体证明路线的理解

这套证明遵循**先做结构，再做计数**的路线。最小诱导子图 G_1 将原问题约化为具有统一最小度下界的情形；两次 ε^+ -regular pair 的提取进一步建立稳定的二分骨架。Step 4 和 Step 5 再围绕该骨架完成结构整理与计数。

这与极值图论中先确定近似极值结构、再进行精细计数的常见路线一致。本文没有借助 Szemerédi 正则引理 [6] 给出全局划分，而是直接提取一个足够大的局部单侧拟随机对，并围绕该结构展开后续分析。

1.2 我认为最关键的两个局部步骤

第一个关键步骤是文中的 Lemma 2.5 的使用。这个引理并不是传统意义上的“正则对”，因为它只要求任意大子对之间的密度下界，而不要求密度接近整体密度。也正因为如此，它更弱，却也更容易在本文需要的地方发挥作用。作者并不需要一个全局的 regular partition；他只需要一个足够大的二分片段，使得后面每次想从一边往另一边找线性数量的邻点时，不会突然掉到太稀薄的区域里。

第二个关键步骤是文中的 Claim 3.9。这一条把“内部度很小”加强成了“内部度至多为 $\alpha(G)$ ”。这个变化的意义非常大：如果只知道 $\deg(v, A) \ll n$ ，那还只是一个粗略的稀疏性信息；而一旦把上界压到 $\alpha(G)$ ，就能立刻与独立数条件配合，推出三角形、短奇圈和公共邻点的很多强限制。后面 $|A|, |B| = n/2 + O(\alpha(G))$ 的平衡结论，以及 $G[A], G[B]$ 中不含 C_3, C_5, C_7 的结构结论，都是从此一步开始真正接上去的。

1.3 一个参数化改进

文中的 Lemma 2.5 可以进一步参数化。原文在迭代里固定采用“把坏顶点阈值设为 2ε ”的做法，这样最后得到

$$|X| \geq \exp\left(-\frac{2\log(2/\varepsilon)\log(2/\delta)}{\varepsilon}\right)|A|.$$

这个下界已经足够支撑主定理，但它并不是最优的。若把阈值改成 $t\varepsilon$ （其中 $1 < t < \delta/\varepsilon$ ），则可以得到一个更灵活的版本：

$$|X| \geq \exp\left(-\frac{\log \frac{1}{\varepsilon(1-1/t)} \cdot \log \frac{1-t\varepsilon}{\delta-t\varepsilon}}{\log \frac{1}{1-\varepsilon}}\right)|A|,$$

并且

$$|Y| \geq \frac{\delta - t\varepsilon}{1 - t\varepsilon}|B|.$$

该参数化形式揭示了两个下界之间的权衡： t 较小时， Y -侧保留得更多； t 较大时， X -侧的指数损失较小。后续常数均受到这一提取步骤的影响，因此优化 γ 或 N 时可以首先调整参数 t 。

1.4 我对原文中两个细节的看法

第一个细节是 Observation 3.6。原文写出 $\deg(v, B_3) \geq n/9$ 时，如果只使用已经被粗化过的下界，常数上会出现一个小缺口。我重新整理这一步时发现：问题不在结论本身，而在于中间不能过早把 $|B_3|$ 粗化成 $\frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G)$ 。保留 Step 3 中从 ε^+ -regular pair 得到的度数余量后，仍可严格推出 $n/9$ 。因此这一处需要补充常数追踪，而不需要修改结论。

第二个细节是 Claim 3.9。原文只给出了证明梗概，但该断言是后续结构分析的关键。完整证明需要说明两点：为什么 $\deg(v, A) > \alpha(G)$ 会在 A 内产生一个三角形；以及为什么该三角形中必有两个顶点在 B 中拥有多于 $\alpha(G)$ 个公共邻点。补全这两步后，所需的常数余量可以得到严格验证。

1.5 一个可以直接保留下来的更强结论

我还觉得，原文最后的主定理证明里其实包含了一个没有被单独说出来的稳定性信息。作者在最后得到

$$2e(G) \leq |A||B| + \alpha(G)n - \alpha(G)^2,$$

再代入

$$|A| = \frac{n}{2} + k, \quad |B| = \frac{n}{2} - k$$

以后，其实得到的是

$$e(G) \leq \frac{n^2}{8} + \frac{\alpha(G)n - \alpha(G)^2}{2} - \frac{k^2}{2}.$$

也就是说，两边越不平衡，允许的边数上界就越低。这条额外的 $-k^2/2$ 没有被写进主定理，因为证明主结论并不需要它；但如果从“极值结构有多接近二分”这个角度看，它其实已经是一条相当明确的稳定性信息了。

1.6 三个还能单独提出的加强命题

我重新从头到尾看了一遍以后，觉得至少还有三处内容可以不只是停留在口头讨论，而是能正式写成命题并给出完整证明。

Proposition 1.1. 设 G_1 是正文中取出的极小诱导子图，则实际上有

$$|V(G_1)| > \sqrt{\alpha(G)(n - \alpha(G))}.$$



Proof. 在正文中，作者为了得到一个足够使用的下界，把

$$\frac{\alpha - \alpha^2}{2} n^2 = \frac{\alpha(G)(n - \alpha(G))}{2}$$

粗略地压成了 $\alpha(G)n/4$ 。如果不做这一步粗化，那么由极小诱导子图的定义可知

$$e(G_1) > \frac{\alpha(G)(n - \alpha(G))}{2}.$$

另一方面，若记 $n_1 = |V(G_1)|$ ，则因为 G_1 是简单图，

$$e(G_1) \leq \binom{n_1}{2} < \frac{n_1^2}{2}.$$

比较这两个不等式，得到

$$n_1^2 > \alpha(G)(n - \alpha(G)),$$

于是

$$|V(G_1)| > \sqrt{\alpha(G)(n - \alpha(G))}.$$

这比正文中使用的

$$|V(G_1)| > \sqrt{\alpha(G)n/2}$$

略强一些。 □

Proposition 1.2. 设正文最后得到的划分满足

$$|A| = \frac{n}{2} + k, \quad |B| = \frac{n}{2} - k.$$

则实际上有

$$e(G) \leq \frac{n^2}{8} + \frac{\alpha(G)n - \alpha(G)^2}{2} - \frac{k^2}{2}.$$



Proof. 正文最后已经证明

$$2e(G) \leq |A||B| + \alpha(G)n - \alpha(G)^2.$$

把

$$|A||B| = \left(\frac{n}{2} + k\right) \left(\frac{n}{2} - k\right) = \frac{n^2}{4} - k^2$$

代入，就得到

$$2e(G) \leq \frac{n^2}{4} - k^2 + \alpha(G)n - \alpha(G)^2.$$

两边同时除以 2，便有

$$e(G) \leq \frac{n^2}{8} + \frac{\alpha(G)n - \alpha(G)^2}{2} - \frac{k^2}{2}.$$

所以主定理最后的计算其实还保留了一条稳定性信息：如果最后得到的二分结构不够平衡，那么边数上界会自动下降。 □

Proposition 1.3. 设 G 是 K_4 -free 图, 并且在正文 Step 4 的记号下已经得到集合 A, B , 满足

$$\deg(v, A) \leq \alpha(G) \quad (v \in A), \quad \deg(u, B) \leq \alpha(G) \quad (u \in B),$$

以及

$$\frac{n}{2} - 3\alpha(G) \leq |A|, |B| \leq \frac{n}{2} + 3\alpha(G).$$

若 $r \geq 1$ 且

$$(28r + 8)\alpha(G) < n,$$

则 $G[A]$ 与 $G[B]$ 都不含长度为 $2r + 1$ 的圈。



Proof. 只证明 $G[A]$ 的情形。设反面存在一个长度为 $2r + 1$ 的圈

$$v_1 v_2 \cdots v_{2r+1} v_1 \subseteq G[A].$$

对每个 i , 记

$$H_i := N(v_i) \cap B.$$

由于 $v_i \in A$ 且 $\deg(v_i, A) \leq \alpha(G)$, 由最小度条件 $\delta(G) \geq n/4$ 可得

$$|H_i| = \deg(v_i, B) \geq \frac{n}{4} - \alpha(G).$$

又因为

$$|B| \leq \frac{n}{2} + 3\alpha(G),$$

并且对每条边 $v_i v_{i+1}$ 来说, 集合 $H_i \cap H_{i+1}$ 必须是独立集, 否则就会和 $v_i v_{i+1}$ 一起构成一个 K_4 。因此

$$|H_i \cap H_{i+1}| \leq \alpha(G).$$

于是

$$\begin{aligned} |B \setminus (H_i \cup H_{i+1})| &= |B| - |H_i| - |H_{i+1}| + |H_i \cap H_{i+1}| \\ &\leq \left(\frac{n}{2} + 3\alpha(G)\right) - 2\left(\frac{n}{4} - \alpha(G)\right) + \alpha(G) \\ &= 6\alpha(G). \end{aligned}$$

另一方面,

$$H_{i+2} \setminus H_i \subseteq (H_{i+2} \cap H_{i+1}) \cup (B \setminus (H_i \cup H_{i+1})),$$

因此

$$|H_{i+2} \setminus H_i| \leq 7\alpha(G).$$

沿着奇数下标反复使用这个估计, 得到

$$|H_{2r+1} \setminus H_1| \leq 7r\alpha(G).$$

从而

$$|H_{2r+1} \cap H_1| \geq |H_{2r+1}| - |H_{2r+1} \setminus H_1| \geq \frac{n}{4} - (7r + 1)\alpha(G).$$

而条件 $(28r + 8)\alpha(G) < n$ 蕴含

$$\frac{n}{4} - (7r + 1)\alpha(G) > \alpha(G),$$

于是

$$|H_{2r+1} \cap H_1| > \alpha(G).$$

但 $v_1 v_{2r+1} \in E(G)$, 所以公共邻点集合

$$H_{2r+1} \cap H_1 = N(v_1) \cap N(v_{2r+1}) \cap B$$

必须是独立集, 其大小至多为 $\alpha(G)$, 矛盾。

因此 $G[A]$ 中不存在长度为 $2r+1$ 的圈。对 $G[B]$ 的证明完全相同。 $\square$

1.7 回到 $\nu = 1/500$ 能否改进

我觉得这个问题是可以认真往前推进的, 而且不是只有“直觉上应该还能改”, 而是可以明确写出一条改进链。原文把 ν 固定为 $1/500$, 主要是为了让后面的常数判断都一次通过。但如果把 Step 3、Step 4 中几处过早粗化的地方收紧, 那么至少可以把这个阈值明显往上推。

Proposition 1.4. 沿用原文的整体证明框架, 并保持

$$\gamma = \exp\left(-\frac{10 \log(1/\nu)}{\nu}\right), \quad N = \exp\left(\frac{10 \log(1/\nu)}{\nu}\right),$$

只要 $0 < \nu < 1/321$, 则正文中从 Step 1 到 Step 5 的论证仍然可以完成。也就是说, 把原文中的 $\nu = 1/500$ 换成任意 $\nu < 1/321$ 仍然足够。



Proof. 证明的关键不在于重写整篇文章, 而在于找出原文里真正限制 ν 的地方, 并用更精细的估计替换掉其中最粗的几步。

先看 Step 3。对每个 $v \in A_2$, 由 Claim 2.4 的结论可知

$$\deg(v, V \setminus A_2) \geq \frac{n}{4} - \nu|A_1|.$$

将 Lemma 2.5 应用于二部图 $G[A_2, V \setminus A_2]$ 后, 对每个 $v \in A'_2$, 有

$$\deg(v, B_2) \geq \frac{n}{4} - \nu|A_1| - 2\nu|V \setminus A_2|.$$

注意到

$$|V \setminus A_2| = n - |A_2|, \quad |A_2| > (1 - \nu)|A_1|,$$

所以

$$\begin{aligned} \nu|A_1| + 2\nu|V \setminus A_2| &= \nu|A_1| + 2\nu(n - |A_2|) \\ &= 2\nu n + \nu(|A_1| - 2|A_2|) \\ &< 2\nu n, \end{aligned}$$

因为

$$|A_1| - 2|A_2| < |A_1| - 2(1 - \nu)|A_1| = (2\nu - 1)|A_1| < 0.$$

于是对每个 $v \in A'_2$, 都有

$$\deg(v, B_2) > \frac{n}{4} - 2\nu n.$$

再像原文那样在 A'_2 中取一条边 uv , 由

$$\deg(u, B_2) + \deg(v, B_2) \leq |B_2| + \alpha(G)$$

得到

$$|B_2| > \frac{n}{2} - 4\nu n - \alpha(G).$$

接着由 B_3 的定义和 ν^+ -regular 性,

$$|B_3| \geq (1 - \nu)|B_2| > |B_2| - \nu n > \frac{n}{2} - 5\nu n - \alpha(G).$$

另一方面, Step 2 里已经有

$$|A_2| \geq \frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G).$$

因此

$$|V \setminus (A_2 \cup B_3)| = n - |A_2| - |B_3| < 12\nu n + 2\alpha(G).$$

由于 $\alpha(G) < \nu^3 n$, 上式进一步给出

$$|V \setminus (A_2 \cup B_3)| < (12\nu + 2\nu^3)n.$$

现在回到 Observation 3.6. 对任意 $x \in V \setminus (A_2 \cup B_3)$, 由最小度条件 $\delta(G) \geq n/4$ 得

$$\deg(x, A_2) + \deg(x, B_3) > \frac{n}{4} - (12\nu + 2\nu^3)n.$$

若 $x \in A'$, 则 $\deg(x, B_3) \geq \deg(x, A_2)$, 从而

$$\deg(x, B_3) > \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3\right)n.$$

同理, 若 $x \in B'$, 则

$$\deg(x, A_2) > \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3\right)n.$$

接下来检查 Claim 3.7. 设 $u_1 u_2$ 是 $A \setminus A' = A_2$ 中的一条边. 由 $\deg(u_i, A_2) \leq \nu|A_1| < \nu n$ 以及

$$|A'| \leq |V \setminus (A_2 \cup B_3)| < 12\nu n + 2\alpha(G),$$

可得

$$\deg(u_i, A) < 13\nu n + 2\alpha(G).$$

于是

$$\deg(u_i, B) > \frac{n}{4} - 13\nu n - 2\alpha(G).$$

再利用

$$|N(u_1) \cap N(u_2)| \leq \alpha(G),$$

可得

$$|(N(u_1) \cup N(u_2)) \cap B| > \frac{n}{2} - 26\nu n - 5\alpha(G).$$

同时由

$$|B| \leq \frac{n}{2} + 7\nu n + \alpha(G)$$

得到

$$|B \setminus (N(u_1) \cup N(u_2))| < 33\nu n + 6\alpha(G).$$

现在对任意 $v \in A$, 都有

$$|N(v) \cap B| > \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3\right)n.$$

若同时有

$$|N(v) \cap N(u_1) \cap B| \leq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3 \right) n - (33\nu n + 6\alpha(G)) \right)$$

和

$$|N(v) \cap N(u_2) \cap B| \leq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3 \right) n - (33\nu n + 6\alpha(G)) \right),$$

那么就会推出

$$|N(v) \cap B| < \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3 \right) n,$$

矛盾。因此至少有一个交集满足

$$|N(v) \cap N(u_i) \cap B| > \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{8} - 39\nu - \nu^3 \right) n - 6\alpha(G) \right).$$

只要右端大于 $\alpha(G)$, Claim 3.7 的原论证就仍然成立。由 $\alpha(G) < \nu^3 n$, 只需验证

$$\frac{1}{8} - 39\nu - 9\nu^3 > 0.$$

而当 $\nu < 1/321$ 时, 这个量严格为正。因此 Claim 3.7 仍然成立。

一旦 Claim 3.7 保持成立, 后面的 Corollary 3.8 和 Claim 3.9 也可以用同样的方法继续推进。事实上, 此时

$$\deg(v, A) < 13\nu n + 3\alpha(G),$$

于是三角形顶点在 B 中的度下界比原文更强, Claim 3.9 的计数会更宽裕。最后 Step 5 里涉及 $|A|, |B|$ 的估计本来就只有 $O(\alpha(G))$ 量级, 因此不会成为 ν 的新瓶颈。

综上, 原文取 $\nu = 1/500$ 明显是一个偏保守的选择。只要把 Step 3 和 Step 4 的常数继续细追, 至少可以把它推进到任意 $\nu < 1/321$ 的范围。□

 $\nu = 1/500$ 并不是该方法本身的极限, 而是便于统一处理误差项的保守选择。目前的计算表明, 主要限制来自 Step 3 到 Claim 3.7 的常数传递; 若继续提高 ν , 还需要重新检查 Claim 3.7 与 Claim 3.9 之间的常数余量。

1.8 顺着 Step 3 和 Step 4 还能继续抠出的三个局部改进

上面关于 ν 的命题综合使用了几处局部估计。将它们分别写成加强结论, 可以明确各步的常数损失, 并为继续改进 ν 的范围提供直接依据。

Proposition 1.5. 沿用正文 Step 3 的记号, 则实际上有

$$|B_2| > \frac{n}{2} - 4\nu n - \alpha(G), \quad |B_3| > \frac{n}{2} - 5\nu n - \alpha(G).$$



Proof. 正文中先由 Claim 2.4 得到: 对每个 $v \in A_2$, 都有

$$\deg(v, V \setminus A_2) \geq \frac{n}{4} - \nu|A_1|.$$

再把 Lemma 2.5 用到二部图 $G[A_2, V \setminus A_2]$ 上, 于是对每个 $v \in A'_2$, 都有

$$\deg(v, B_2) \geq \frac{n}{4} - \nu|A_1| - 2\nu|V \setminus A_2|.$$

因为

$$|V \setminus A_2| = n - |A_2|, \quad |A_2| \geq (1 - \nu)|A_1|,$$

所以

$$\begin{aligned} \nu|A_1| + 2\nu|V \setminus A_2| &= \nu|A_1| + 2\nu(n - |A_2|) \\ &= 2\nu n + \nu(|A_1| - 2|A_2|) \\ &\leq 2\nu n + \nu(|A_1| - 2(1 - \nu)|A_1|) \\ &= 2\nu n - (1 - 2\nu)\nu|A_1| \\ &< 2\nu n. \end{aligned}$$

因此每个 $v \in A'_2$ 都满足

$$\deg(v, B_2) > \frac{n}{4} - 2\nu n.$$

另一方面, 由正文对 $|A'_2|$ 的下界, 再结合 $\alpha(G) < \gamma n$, 可知 $|A'_2| > \alpha(G)$ 。因此 A'_2 不是独立集, 可在其中取一条边 uv 。对这条边在集合 B_2 上应用 Observation 3.1, 便有

$$\deg(u, B_2) + \deg(v, B_2) \leq |B_2| + \alpha(G).$$

由前面的度下界,

$$|B_2| + \alpha(G) > 2\left(\frac{n}{4} - 2\nu n\right) = \frac{n}{2} - 4\nu n,$$

从而

$$|B_2| > \frac{n}{2} - 4\nu n - \alpha(G).$$

最后, 由 B_3 的定义与 ν^+ -regular 性,

$$|B_3| \geq (1 - \nu)|B_2| \geq |B_2| - \nu n,$$

所以

$$|B_3| > \frac{n}{2} - 5\nu n - \alpha(G).$$

□

Proposition 1.6. 沿用正文 Step 4 的记号。若 $x \in A'$, 则

$$\deg(x, B_3) > \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3\right)n;$$

若 $x \in B'$, 则

$$\deg(x, A_2) > \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3\right)n.$$



Proof. 由正文 Step 2 的结论,

$$|A_2| \geq \frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G).$$

再由 proposition 1.5,

$$|B_3| > \frac{n}{2} - 5\nu n - \alpha(G).$$

于是

$$\begin{aligned} |V \setminus (A_2 \cup B_3)| &= n - |A_2| - |B_3| \\ &< n - \left(\frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G)\right) - \left(\frac{n}{2} - 5\nu n - \alpha(G)\right) \\ &= 12\nu n + 2\alpha(G) \\ &< (12\nu + 2\nu^3)n, \end{aligned}$$

其中最后一步用到了 $\alpha(G) < \nu^3 n$ 。

现在取任意 $x \in V \setminus (A_2 \cup B_3)$ 。由 $\delta(G) \geq n/4$ 可知

$$\deg(x, A_2) + \deg(x, B_3) \geq \deg(x, A_2 \cup B_3) > \frac{n}{4} - (12\nu + 2\nu^3)n.$$

如果 $x \in A'$ ，那么按定义有 $\deg(x, B_3) \geq \deg(x, A_2)$ ，所以

$$2 \deg(x, B_3) > \frac{n}{4} - (12\nu + 2\nu^3)n,$$

即

$$\deg(x, B_3) > \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3 \right) n.$$

若 $x \in B'$ ，则同理得到

$$\deg(x, A_2) > \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3 \right) n.$$

□

Proposition 1.7. 沿用正文 *Step 4* 的记号，并设正文中 *Claim 3.7* 那条结论已经得到。则对每个 $v \in A$ 与每个 $u \in B$ ，都有

$$\deg(v, A) < 12\nu n + 3\alpha(G), \quad \deg(u, B) < 12\nu n + 3\alpha(G).$$



Proof. 只证关于 A 的部分， B 的证明完全对称。由正文中 *Claim 3.7* 的结论，

$$\deg(v, A \setminus A') \leq \alpha(G) \quad (v \in A).$$

因此

$$\deg(v, A) \leq \deg(v, A \setminus A') + |A'| \leq \alpha(G) + |A'|.$$

另一方面，

$$|A'| \leq |A'| + |B'| = |V \setminus (A_2 \cup B_3)|.$$

由上一个命题的证明过程，我们已经得到

$$|V \setminus (A_2 \cup B_3)| < 12\nu n + 2\alpha(G).$$

代回去便有

$$\deg(v, A) < \alpha(G) + 12\nu n + 2\alpha(G) = 12\nu n + 3\alpha(G).$$

对 $u \in B$ 的证明完全一样。

□

 这三条加强分别保留了 *Step 3* 的度数余量、给出了 *Observation 3.6* 的显式线性下界，并收紧了 *Corollary 3.8* 的内部度上界。它们表明，原文中的部分常数损失来自中间步骤的粗化，而非结构本身的限制。

1.9 和 Lemma 3.12 很接近的一条更深结构定理

与 Lemma 3.12 相关的一条经典结构结果是 Andrásfai–Erdős–Sós 定理 [4]。两者都通过限制奇结构获得较强的整体结构结论。Lemma 3.12 使用 C_3, C_5, C_7 的禁用，而 Andrásfai–Erdős–Sós 定理用的是更强的最小度条件。

Theorem 1.8 (Andrásfai–Erdős–Sós). 设 F 是一个三角形自由图, 且 $|V(F)| = m$ 。如果

$$\delta(F) > \frac{2m}{5},$$

那么 F 必为二分图。



Corollary 1.9. 设 F 是一个三角形自由图, 且

$$\delta(F) > \frac{2|V(F)|}{5}.$$

那么

$$\alpha(F) \geq \frac{|V(F)|}{2}, \quad e(F) \leq \alpha(F)^2.$$



Proof. 由 theorem 1.8, 图 F 是二分图。设其二分为

$$V(F) = X \sqcup Y, \quad |X| = x, \quad |Y| = y, \quad x + y = |V(F)|.$$

因为任一侧本身都是独立集, 所以

$$\alpha(F) \geq \max\{x, y\} \geq \frac{|V(F)|}{2}.$$

又因为 F 是二分图, 所有边都在 X 与 Y 之间, 因此

$$e(F) \leq xy.$$

不妨设 $y = \max\{x, y\}$ 。则 $y \leq \alpha(F)$, 并且 $x = |V(F)| - y \leq y$ 。于是

$$e(F) \leq xy \leq y^2 \leq \alpha(F)^2.$$

故结论成立。 □

 若只禁止三角形并附加较强的最小度条件, 则由 theorem 1.8 可知图必为二分图, 此时 $e(F) \leq \alpha(F)^2$ 可以直接推出。Lemma 3.12 不要求较大的最小度, 而是进一步排除 C_5 和 C_7 。代价是结论不再是“ F 必为二分图”, 但仍然保住了最后最关键的边数控制

$$e(F) \leq \alpha(F)^2.$$

因此, Lemma 3.12 可以视为在弱化最小度假设、强化奇圈禁用条件后得到的边数控制结论。

 当三角形自由图的最小度低于 $2m/5$ 时, 五圈放大图会成为典型障碍。因此, 本文在 $G[A]$ 、 $G[B]$ 中进一步排除 C_5 和 C_7 , 可以理解为排除这类非二分结构, 为最终的内部边数估计创造条件。

2 个人思考

2.1 和现代图论课程内容的联系

本文与现代图论课程中的极值图论和正则性方法联系紧密。Turán 型问题研究禁止子图条件下的最大边数, 而 Ramsey–Turán 问题在此基础上增加独立数限制。因此, 其极值结构不再是单纯的 Turán 图, 而呈现出近似二分、内部扰动受控的特征。

虽然本文不使用 Szemerédi 正则引理 [6], 但仍保留了从复杂图中提取均匀结构的正则性思想。与全局正则划分不同, 本文围绕证明所需结构直接进行局部、定向的提取。

2.2 我对这篇文章方法的一点总体判断

本文的方法围绕 K_4 情形进行针对性的结构分析，从而避免了正则引理带来的 tower-type 常数；相应地，证明对 K_4 -free 图的局部结构依赖较强。特别是后面 A, B 两边的构造、短奇圈排除、以及最后调用 $e(F) \leq \alpha(F)^2$ 这一类内部图结论，都很难直接想象怎样推广到一般 K_r 。

因此，这套方法目前更适合看作针对 K_4 的专门证明。若要推广到一般 K_r ，需要新的多部结构提取工具和相应的内部边数控制结果。

2.3 我最感兴趣的后续问题

如果要从这篇文章继续往下想，我目前最感兴趣的是下面两个问题。

第一个问题是：能不能在不改变整体路线的前提下，把常数继续推进？作者已经把依赖从 tower-type 降到了 single-exponential，但最后给出的 γ 仍然很小。证明中的主要损失集中在 one-sided regular pair 的抽取和后续粗化，因此可以继续研究这些局部步骤能够将 γ 和 N 改进到什么程度。

第二个问题是：能不能把最后的稳定性信息单独整理出来？主定理证明的最后一步表明极值图必须接近一个平衡二分结构。可以进一步研究如下稳定性问题：当边数足够接近阈值时，图在编辑距离意义下是否接近某个 Bollobás–Erdős 型构造？

2.4 最后一点个人感受

我自己写这份报告的时候，一个很直观的感受是：这篇文章并不是那种“定理一眼看过去很强，证明却主要是机械计算”的论文。它真正难的地方恰恰在于前面那几个结构步骤，而不是后面的大段代数整理。对我来说，最有收获的一点也在这里：很多时候一篇图论论文最重要的内容，不是某条不等式最后写成了什么样子，而是作者是怎样一步一步把原问题压成那个不等式的。把这个过程看懂，往往比把最后两页的计算抄完整更能学到东西。

参考文献

- [1] B. Csaba, On the Ramsey–Turán problem for 4-cliques, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 39 (2025), 1201–1212.
- [2] C. M. Lüders and C. Reiher, The Ramsey–Turán problem for cliques, *Israel Journal of Mathematics*, 230 (2019), 613–652.
- [3] M. Simonovits and V. T. Sós, Ramsey–Turán theory, *Discrete Mathematics*, 229 (2001), 293–340.
- [4] B. Andrásfai, P. Erdős, and V. T. Sós, On the connection between chromatic number, maximal clique and minimal degree of a graph, *Discrete Mathematics*, 8 (1974), 205–218.
- [5] V. T. Sós, On extremal problems in graph theory, in *Proceedings of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and Their Applications*, 1969, 407–410.
- [6] E. Szemerédi, Regular partitions of graphs, in *Colloques Internationaux C.N.R.S. No. 260 – Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes*, 1976, 399–401.