



Differential Geometry

MELODY

May 1, 2026



Copyright © 2026 Melody

Copying prohibited

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and recording, or by any information storage or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

Art. No 00001

ISBN 111-11-1111-11-1

Edition 1.0

Cover design by Melody

Published by Three Squirrels

Printed in Tianjin

If you have any questions, please send email to nkuSherr1@nankai.edu.cn



目录

1	概念补充	5
1.1	曲线部分	5
1.2	曲面部分	9
1.2.1	切平面和法方向	9
1.2.2	第一基本形式	10
1.2.3	第二基本形式	11
1.2.4	法曲率函数	12
1.2.5	Weingarten 映射	12
1.2.6	各种曲率（包括曲率线）	13
1.2.7	结构方程	15
1.2.8	上课的疑难点	17
1.3	进一步补充	17
2	作业题	19
2.1	第一次作业 2026.03.04	19
2.2	第二次作业 2026.03.11	23
2.3	第三次作业 2026.03.18	30
2.4	第四次作业 2026.03.25	36
2.5	第五次作业 2026.04.01	39

2.6	第六次作业 2026.04.08	44
2.7	第七次作业 2026.04.15	49
3	每周一题	55
3.1	2026.03.11	55
3.2	2026.03.18	57
3.3	2026.03.25	58
3.4	2026.04.01	59
3.5	2026.04.08	62
3.6	2026.04.15	64
3.7	2026.04.22	66

1. 概念补充

1.1	曲线部分	5
1.2	曲面部分	9
1.2.1	切平面和法方向	9
1.2.2	第一基本形式	10
1.2.3	第二基本形式	11
1.2.4	法曲率函数	12
1.2.5	Weingarten 映射	12
1.2.6	各种曲率（包括曲率线）	13
1.2.7	结构方程	15
1.2.8	上课的疑难点	17
1.3	进一步补充	17

1.1 曲线部分

定义 1.1.1. 设区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上有映射

$$P : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto P(t).$$

若 P 光滑且对每个 $t \in I$ 都有 $P'(t) \neq 0$ ，则称 P 为一条**正则曲线**。若参数 t 不一定是弧长参数，则称它为曲线的一个**一般参数**。



定义 1.1.2. 曲线

$$P : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

的弧长函数定义为

$$s(t) = \int_{t_0}^t |P'(\xi)| d\xi.$$

若参数本身满足 $|P'(s)| = 1$ ，则称 s 是**弧长参数**。用弧长参数表示曲线时，切向量天然是单位向量。



定义 1.1.3. 设 $P = P(s)$ 是以弧长参数表示的正则曲线, 则

$$T(s) = P'(s)$$

称为曲线的**单位切向量场**。在平面曲线中, 常把与 T 正交且满足正向取向的单位向量记为 β ; 在空间曲线中, 若曲率不为零, 则还可以定义主法向量 N 和副法向量 B 。

定义 1.1.4. 设 $P = P(s)$ 是以弧长参数表示的空间正则曲线, 且 $\kappa(s) \neq 0$ 。定义

$$\kappa(s) = |T'(s)|, \quad N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|}, \quad B(s) = T(s) \times N(s).$$

三个单位向量组

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

称为曲线的**Frenet 标架**; $\kappa(s)$ 称为**曲率**; 若再定义

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle,$$

则 $\tau(s)$ 称为**挠率**。

对于一般曲线 $P(t)$, 这里我们不要求 t 一定为正则参数, 此时曲率、挠率有计算公式:

$$\kappa(t) = \frac{|P'(t) \times P''(t)|}{|P'(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{(P'(t), P''(t), P'''(t))}{|P'(t) \times P''(t)|^2}$$

当然相应的 $T(t), N(t), B(t)$ 为

$$T(t) = \frac{P'(t)}{|P'(t)|}, \quad N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}, \quad B(t) = T(t) \times N(t)$$

性质 1.1.1. Frenet 标架满足**Frenet 公式**

$$\begin{cases} T' = \kappa N, \\ N' = -\kappa T + \tau B, \\ B' = -\tau N. \end{cases}$$

它们描述了曲线在空间中的弯曲与扭转。

定义 1.1.5. 平面曲线在弧长参数下的带符号曲率常记为**相对曲率** κ_r 。若 $\{\alpha(s), \beta(s)\}$ 是平面中的正交标架场, 其中 α 是单位切向量, 则

$$\kappa_r(s) = \left\langle \frac{d\alpha}{ds}, \beta(s) \right\rangle.$$

对一般参数 t , 若 $P(t) = (x(t), y(t))$, 则

$$\kappa_r(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

 这里我们讨论的是平面情形，即对 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线

$$P(s) = (x(s), y(s))$$

s 为弧长参数，其单位切向量为

$$\alpha(s) = (x'(s), y'(s))$$

其法向量（将 α 沿正向方向旋转 90° ）为

$$\beta(s) = (-y'(s), x'(s))$$

我们有平面的 *Frenet* 公式：

$$\begin{cases} \frac{dP}{ds} = \alpha(s) \\ \frac{d\alpha}{ds} = \kappa_r \beta(s) \\ \frac{d\beta}{ds} = -\kappa_r \alpha(s) \end{cases}$$

 注. 更进一步，我们引入方向角，即 $\alpha(s)$ 和 x 轴正向夹角 $\theta(s)$ ，尽管方向角是多值的，但对于 s 的充分小邻域我们总可以取出 $\theta(s)$ 的一个连通分支，此时在局部上我们有：

$$\alpha(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)), \quad \beta(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$$

于是

$$\kappa_r = \frac{d\theta}{ds}$$

相应的，我们有平面曲线基本定理：

$$\begin{cases} \theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^s \kappa_r(s) ds \\ x(s) = x(s_0) + \int_{s_0}^s \cos \theta(s) ds \\ y(s) = y(s_0) + \int_{s_0}^s \sin \theta(s) ds \end{cases}$$

定义 1.1.6. 若平面曲线或空间曲线已经用弧长参数 s 表示，并把曲率写成 s 的函数

$$\kappa = \kappa(s),$$

则称这个关系为曲线的自然方程。对平面曲线，自然方程确定曲线到刚体运动意义下的形状；对空间曲线，一般还需要挠率函数 $\tau = \tau(s)$ 。



定义 1.1.7. 设 $P = P(s)$ 是弧长参数曲线，定义

$$\int \kappa(s) ds$$

为曲线的总曲率。若 $T(s)$ 看作单位球面上的一条曲线

$$\tilde{P}(s) = T(s) \in S^2,$$

则称其为原曲线的切线标线 (*tangent indicatrix*)。



定义 1.1.8. 若存在固定单位向量 e 和常数 c , 使空间曲线的单位切向量满足

$$\langle T(s), e \rangle = c,$$

则称该曲线为**广义螺线**。也就是说, 它的切向量与某个固定方向的夹角恒定。



定义 1.1.9. 若一条空间曲线在某个坐标系下可以表示为“绕固定轴做匀速转动, 同时沿该轴方向前进”的轨迹, 则称它为**圆柱螺线**。它是最典型的广义螺线。



定义 1.1.10. 若欧氏空间中的映射可以写成

$$\Phi(x) = Ax + b,$$

其中 A 是正交变换, b 是常向量, 则称 Φ 为一个**刚体运动**。若两条曲线或两个曲面可由某个刚体运动互相变换得到, 则称它们**合同**。



性质 1.1.2. 切线标线的速度满足

$$|\tilde{P}'(s)| = |T'(s)| = \kappa(s),$$

因而切线标线的长度等于原曲线的总曲率。



定义 1.1.11. 设平面曲线 $C: P = P(s)$ 以弧长参数表示, 单位切向量为 $T(s)$ 。曲线

$$\tilde{P}(s) = P(s) - sT(s)$$

称为 C 的**渐伸线** (involute)。直观上它表示把一根绷紧的线从原曲线“放开”时端点扫出的轨迹。



定义 1.1.12. 设平面曲线 C 的法向量场为 $\beta(s)$ 。若 d 为常数, 则曲线

$$\tilde{P}(s) = P(s) - d\beta(s)$$

称为 C 的**平行曲线**。它与原曲线在法向方向上相距固定距离。



性质 1.1.3. 设 $C: P(t) = (x(t), y(t))$ 是一条按正向绕行的简单闭曲线, 所围区域面积为 A 。由 Green 公式

$$\iint_D 1 \, dx \, dy = \oint_C x \, dy = - \oint_C y \, dx,$$

可得常用面积公式

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (x \, dy - y \, dx).$$

若 $P = P(s)$ 用弧长参数表示, 且 $P'(s) = \alpha(s)$, 则

$$A = \frac{1}{2} \int \det(P(s), P'(s)) \, ds = \frac{1}{2} \int \det(P(s), \alpha(s)) \, ds.$$

这个公式常用于由边界曲线计算平面闭曲线所围面积。



 注. 在空间曲线中, 过点 $P(s)$ 且由 T, N, B 两两张成的三个典型平面分别称为:

密切平面 $\text{span}\{T, N\}$, 法平面 $\text{span}\{N, B\}$,

次切平面 (rectifying plane) $\text{span}\{T, B\}$.

题目中提到“所有次切平面都经过同一个固定点”, 指的正是第三类平面。

1.2 曲面部分

1.2.1 切平面和法方向

定义 1.2.1. 设开集 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上有光滑映射

$$P: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto P(u, v).$$

若对每个 $(u, v) \in U$ 都有

$$P_u(u, v) \times P_v(u, v) \neq 0, \text{ i.e. } \text{rank} \begin{pmatrix} P_u \\ P_v \end{pmatrix} = 2$$

则称该像面为一张**正则曲面**。这里 (u, v) 称为曲面的**参数**。



 注. 正则条件的几何含义是: 两条参数曲线的速度 P_u, P_v 在每一点线性无关, 因此它们可以张成一个真正的二维切平面。若 $P_u \times P_v = 0$, 参数退化, 曲面在该点不能由这组参数给出良好的局部坐标。

定义 1.2.2. 对正则曲面 $S: P = P(u, v)$, 向量 P_u, P_v 张成的二维平面称为曲面在点 $P(u, v)$ 处的**切平面**。与之正交的单位向量场

$$n = \frac{P_u \times P_v}{|P_u \times P_v|}$$

称为**单位法向量场**。过 P_0 的以 n 为方向的直线称为**法线**, 其上任意非零向量称为**法向量**。平面

$$T_{p_0}S = \{T \in \mathbb{R}^3 | \langle T - p_0, n(u_1^0, u_2^0) \rangle = 0\}$$

称为**切平面**, $T_{p_0}S$ 上的任意向量称为 S 在 p_0 处的一个**切向量**。

其中, 三个线性无关的向量 $\frac{\partial P}{\partial u_1}, \frac{\partial P}{\partial u_2}$ 和 n 构成 S 的一个标架, 称为**自然标架**或者 **Gauss 标架**。



 **切平面有参数表示**

$$T_{p_0}S = P(u_1^0, u_2^0) + s \frac{\partial P}{\partial u_1}(u_1^0, u_2^0) + t \frac{\partial P}{\partial u_2}(u_1^0, u_2^0)$$

其中 s, t 为参数。

性质 1.2.1. 若 $X = aP_u + bP_v$ 是切向量, 则

$$\langle X, n \rangle = 0.$$

反过来, 在 $\mathbb{R}^3$ 中过 $P(u_0, v_0)$ 且与 $n(u_0, v_0)$ 正交的所有向量正好构成 $T_{p_0}S$. 因此切平面也可写成

$$T_{p_0}S = \{p_0 + X : \langle X, n(u_0, v_0) \rangle = 0\}.$$



定义 1.2.3. 若在一个区域内可以连续选取单位法向量场 n , 则称曲面在该区域内**可定向**. 把 n 换成 $-n$ 会改变第二基本形式、主曲率和平均曲率的符号, 但不会改变 Gauss 曲率 K .



1.2.2 第一基本形式

定义 1.2.4. 曲面参数 $P(u, v)$ 的**第一基本形式**定义为

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

其中

$$E = \langle P_u, P_u \rangle, \quad F = \langle P_u, P_v \rangle, \quad G = \langle P_v, P_v \rangle.$$

它描述曲面上的长度、夹角和面积等内蕴几何量。



性质 1.2.2. 对切向量 $X = \lambda P_u + \mu P_v$, 第一基本形式就是诱导度量:

$$I(X, X) = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2.$$

因而曲面上参数曲线 $\gamma(t) = P(u(t), v(t))$ 的弧长为

$$L(\gamma) = \int \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt.$$



性质 1.2.3. 两个切向量

$$X = \lambda P_u + \mu P_v, \quad Y = \alpha P_u + \beta P_v$$

的夹角由

$$\cos \theta = \frac{I(X, Y)}{\sqrt{I(X, X)}\sqrt{I(Y, Y)}}$$

给出, 其中

$$I(X, Y) = E\lambda\alpha + F(\lambda\beta + \mu\alpha) + G\mu\beta.$$



性质 1.2.4. 曲面上的面积元由第一基本形式给出:

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$



因而曲面一部分的面积为

$$A(S) = \iint \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

这个量与参数选取无关。



定义 1.2.5. 若曲面参数满足

$$F = \langle P_u, P_v \rangle = 0,$$

则称 (u, v) 为一组**正交参数**。此时参数曲线在每一点互相正交，

$$I = E du^2 + G dv^2.$$

若进一步 $E = G$ ，则称其为**等温参数**或**共形参数**，此时第一基本形式为

$$I = \lambda^2(du^2 + dv^2).$$



1.2.3 第二基本形式

定义 1.2.6. 曲面参数 $P(u, v)$ 的**第二基本形式**定义为

$$II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

其中

$$L = \langle P_{uu}, n \rangle, \quad M = \langle P_{uv}, n \rangle, \quad N = \langle P_{vv}, n \rangle.$$

它描述曲面相对于周围三维空间的弯曲方式。



性质 1.2.5. 因为 $\langle P_u, n \rangle = \langle P_v, n \rangle = 0$ ，对参数求导可得

$$L = -\langle P_u, n_u \rangle, \quad M = -\langle P_u, n_v \rangle = -\langle P_v, n_u \rangle, \quad N = -\langle P_v, n_v \rangle.$$

这说明第二基本形式也可以理解为法向量场变化在切方向上的投影。



性质 1.2.6. 对图形曲面 $P(x, y) = (x, y, f(x, y))$ ，若取向上单位法向量

$$n = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

则

$$E = 1 + f_x^2, \quad F = f_x f_y, \quad G = 1 + f_y^2,$$

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

特别地，若 $f_x = f_y = 0$ ，则 $I = dx^2 + dy^2$ ，第二基本形式就是 *Hessian* 的形式

$$II = f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2.$$



1.2.4 法曲率函数

定义 1.2.7. 设曲面上一点处有非零切向量

$$X = \lambda P_u + \mu P_v.$$

沿方向 X 的**法曲率**定义为

$$k_n(X) = \frac{II(X, X)}{I(X, X)} = \frac{L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2}{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}.$$



定义 1.2.8. 过点 $p \in S$ 且含有法方向 $n(p)$ 与切方向 X 的平面称为该方向的**法截面平面**。它与曲面的交线称为**法截线**。法曲率 $k_n(X)$ 等于这条法截线在 p 处的带符号曲率。



性质 1.2.7. 法曲率只依赖于方向，而不依赖于切向量的长度。也就是说，对任意非零常数 c ,

$$k_n(cX) = k_n(X).$$

因此在一点处，法曲率可以看作定义在切平面方向圆上的函数。



定理 1.2.1. 若曲面上一条曲线 $\gamma(s)$ 以弧长参数表示，曲率向量分解为

$$\gamma''(s) = k_g J\gamma'(s) + k_n n,$$

其中 $J\gamma'$ 是切平面内与 γ' 正交的单位向量，则 k_g 称为**测地曲率**， k_n 就是该切方向的法曲率。于是曲线在空间中的曲率满足

$$\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2.$$



1.2.5 Weingarten 映射

定义 1.2.9. 设曲面 $S: P = P(u, v)$ 带有单位法向量场 n 。定义线性映射

$$S_p: T_p S \rightarrow T_p S, \quad X \mapsto -dn_p(X),$$

称为点 p 处的**形算子** (shape operator) 或 **Weingarten 映射**。它把法向量的变化转化成切平面上的线性变换。



性质 1.2.8. Weingarten 映射是第一基本形式下的自伴算子:

$$I(SX, Y) = I(X, SY), \quad X, Y \in T_p S.$$

并且

$$II(X, Y) = I(SX, Y).$$

因而第二基本形式、法曲率和各种曲率都可以用同一个线性算子 S 来统一描述。



性质 1.2.9. 在自然基 $\{P_u, P_v\}$ 下, Weingarten 映射的矩阵为

$$[S] = I^{-1}II = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{pmatrix}.$$

换言之,

$$\begin{aligned} S(P_u) &= \frac{GL - FM}{EG - F^2} P_u + \frac{EM - FL}{EG - F^2} P_v, \\ S(P_v) &= \frac{GM - FN}{EG - F^2} P_u + \frac{EN - FM}{EG - F^2} P_v. \end{aligned}$$



性质 1.2.10. 曲面的 *Weingarten 公式* 刻画法向量场的变化:

$$n_u = -S(P_u), \quad n_v = -S(P_v).$$

用第一、第二基本形式系数表示时,

$$\begin{cases} n_u = \frac{FM - GL}{EG - F^2} P_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} P_v, \\ n_v = \frac{FN - GM}{EG - F^2} P_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} P_v. \end{cases}$$



1.2.6 各种曲率 (包括曲率线)

定义 1.2.10. 使法曲率取得极值的两个互相正交方向称为 *主方向*, 对应的极值称为 *主曲率* k_1, k_2 . 进一步定义

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

为 *Gauss 曲率*, 定义

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

为 *平均曲率*.



性质 1.2.11. 主曲率是 Weingarten 映射的特征值, 因此可由

$$\det(II - kI) = 0$$

求出。展开为

$$(EG - F^2)k^2 - (EN - 2FM + GL)k + (LN - M^2) = 0.$$

求得 k 后, 主方向 $\lambda P_u + \mu P_v$ 满足

$$\begin{cases} (L - kE)\lambda + (M - kF)\mu = 0, \\ (M - kF)\lambda + (N - kG)\mu = 0. \end{cases}$$



性质 1.2.12. 若某点的主曲率为 k_1, k_2 , 则任意方向的法曲率满足 Euler 公式

$$k_n(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta,$$

其中 θ 是该方向与第一主方向的夹角。



定义 1.2.11. 曲面上的一条正则曲线若其切向方向在每一点都沿主方向, 则称它为曲面的**曲率线**。因此, 曲率线就是“沿主方向积分出来的曲线”。



性质 1.2.13. 曲率线的微分方程为

$$(EM - FL) du^2 + (EN - GL) du dv + (FN - GM) dv^2 = 0.$$

特别地, 若参数网同时满足

$$F = 0, \quad M = 0,$$

则两族参数曲线就是曲率线。反过来, 在无脐点区域内, 若参数曲线是曲率线且互相正交, 则通常可取到 $F = M = 0$ 的主参数。



定义 1.2.12. 若一点处两个主曲率相等, 即

$$k_1 = k_2,$$

则称该点为曲面的**脐点**。若曲面上一点都不是脐点, 则称曲面在讨论区域内**无脐点**。



定义 1.2.13. 按 Gauss 曲率的符号, 曲面点可以分类为:

$$K > 0 \text{ 椭圆点}, \quad K < 0 \text{ 双曲点}, \quad K = 0 \text{ 抛物点或平点}.$$

椭圆点处两个主曲率同号, 双曲点处两个主曲率异号。



定义 1.2.14. 若曲面满足平均曲率恒为零, 即

$$H \equiv 0,$$

则称该曲面为**极小曲面**。



 **注.** 特别的, 对于正交参数网 (u, v) , 即 $P_u \cdot P_v = 0$, 有 $F = 0$ 。若只用第一基本形式计算 Gauss 曲率, 常用公式之一为:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right].$$

这体现了 Gauss 绝妙定理: K 虽由外在弯曲定义, 却完全由第一基本形式决定。

1.2.7 结构方程

定义 1.2.15. 设曲面以参数 $P(u, v)$ 给出, *Christoffel* 符号 Γ_{ij}^k 是由第一基本形式决定的系数, 用来把二阶偏导的切向部分分解到 P_u, P_v 上。它们反映了参数曲线在曲面上的联络信息。



性质 1.2.14. 曲面的 *Gauss 公式* 把二阶偏导分解为切向部分和法向部分:

$$\begin{cases} P_{uu} = \Gamma_{11}^1 P_u + \Gamma_{11}^2 P_v + L n, \\ P_{uv} = \Gamma_{12}^1 P_u + \Gamma_{12}^2 P_v + M n, \\ P_{vv} = \Gamma_{22}^1 P_u + \Gamma_{22}^2 P_v + N n. \end{cases}$$

它说明第二基本形式正是二阶偏导在法向量上的投影。



性质 1.2.15. *Christoffel* 符号由第一基本形式给出。若记

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1},$$

则

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^2 g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_\ell} \right),$$

其中 $u_1 = u, u_2 = v$ 。



定理 1.2.2. 第一、第二基本形式并不是彼此独立的, 它们需要满足相容条件。最常见的是 *Gauss 方程* 与 *Codazzi-Mainardi 方程*:

$$R_{1212} = LN - M^2,$$

$$h_{ij;k} = h_{ik;j}.$$

其中 R_{1212} 由第一基本形式及 *Christoffel* 符号决定, h_{ij} 是第二基本形式系数。给定 I, II 后, 只有满足这些相容条件, 才可能局部来自某张曲面。



注. *Codazzi* 方程的来源可以理解为“先沿 u 方向再沿 v 方向微分”和“先沿 v 方向再沿 u 方向微分”必须相容。具体地, 把 *Gauss 公式* 和 *Weingarten 公式* 代入

$$P_{uuv} = P_{uvu}, \quad P_{uvv} = P_{vvu}$$

后, 比较法向量与切向量系数, 便得到 *Gauss 方程* 与 *Codazzi 方程*。粗略地说, *Gauss 方程* 控制内蕴曲率, *Codazzi 方程* 控制第二基本形式沿曲面的变化是否与第一基本形式兼容。

定义 1.2.16. 记第二基本形式系数为

$$h_{11} = L, \quad h_{12} = h_{21} = M, \quad h_{22} = N.$$



它的协变导数定义为

$$h_{ij;k} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial u_k} - \sum_{\ell=1}^2 \Gamma_{ki}^{\ell} h_{\ell j} - \sum_{\ell=1}^2 \Gamma_{kj}^{\ell} h_{i\ell},$$

其中 $u_1 = u, u_2 = v$ 。Codazzi–Mainardi 方程就是

$$h_{ij;k} = h_{ik;j}.$$

它说明第二基本形式作为一个二阶张量，其协变导数在后两个指标上满足对称性。



性质 1.2.16. 在二维曲面上，Codazzi 方程只有两条本质独立的坐标形式：

$$\begin{cases} L_v - M_u = \Gamma_{12}^1 L + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) M - \Gamma_{11}^2 N, \\ M_v - N_u = \Gamma_{22}^1 L + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) M - \Gamma_{12}^2 N. \end{cases}$$

解题时若已经算出 E, F, G ，就可以先求 Christoffel 符号，再用这两式约束 L, M, N 。



性质 1.2.17. 若取主曲率线参数，使

$$F = 0, \quad M = 0,$$

并记

$$L = k_1 E, \quad N = k_2 G,$$

则 Codazzi 方程化为

$$(k_1)_v = \frac{k_2 - k_1}{2E} E_v, \quad (k_2)_u = \frac{k_1 - k_2}{2G} G_u.$$

这组公式常用来研究主曲率沿曲率线方向的变化。特别地，在无脐点处若 $k_1 \neq k_2$ ，则主曲率的横向变化会受到度量系数 E, G 的变化严格控制。



 Codazzi 方程经常用于“已知第一基本形式，反推第二基本形式”的题目。典型套路是：先由 I 算出 Christoffel 符号，再把题目给出的 $M = 0, L = N, K = 0, H = 0$ 等条件代入 Codazzi 方程，得到关于 L, M, N 或主曲率 k_1, k_2 的微分限制。

定理 1.2.3. 曲面基本定理：若在单连通区域上给定两个二次型 I, II ，其中 I 正定，且二者满足 Gauss 方程与 Codazzi 方程，则存在一张正则曲面以它们为第一、第二基本形式；并且这张曲面在刚体运动意义下唯一。



定义 1.2.17. 设空间曲线 $\rho = \rho(s)$ 以弧长参数表示，单位切向量为 $T(s)$ 。曲面

$$X(s, u) = \rho(s) + uT(s)$$

称为该曲线的切线面。它是典型的直纹面，母线就是曲线各点的切线。



定义 1.2.18. 设空间曲线 $\alpha = \alpha(s)$ 以弧长参数表示, *Frenet* 标架为 $\{T, N, B\}$ 。对常数 $r > 0$, 曲面

$$X(s, \theta) = \alpha(s) + r \cos \theta N(s) + r \sin \theta B(s)$$

称为以 α 为中心曲线、半径为 r 的**管状面**。它表示沿中心曲线移动一个半径固定的法平面圆。



定义 1.2.19. 若曲面由图形

$$z = f(x, y)$$

给出, 则称其为**图形曲面**。此时

$$P(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

是最常用的参数表示。



定义 1.2.20. 若球面 Σ 与曲面 S 在点 P 处有公共点, 并且它们在该点的切平面重合, 则称球面与曲面在 P 处**相切**。题目中 “ $\Sigma \cap S = \{P\}$ ” 常用来推出 P 是限制在曲面上的距离函数的极值点, 从而得到切平面重合。



1.2.8 上课的疑难点

 实际上就是听了自己觉得比较重要且有意思的地方, 但上课的时候我不知道讲的有些在第四章。。事实上 *wxf* 也没说在第四章, 不过这部分我觉得还是值得记录下来的!

1.3 进一步补充

定义 1.3.1. 若曲面可以写成

$$X(s, t) = \gamma(s) + t\delta(s),$$

其中对每个固定的 s , $t \mapsto X(s, t)$ 是一条直线, 则称该曲面为**直纹面**。切线面就是最典型的直纹面之一。



定义 1.3.2. 若曲面的 *Gauss* 曲率恒为零, 即

$$K \equiv 0,$$

则称其为**可展面**。局部上它与平面等距, 因此常被看作“可以无拉伸展开到平面上的曲面”。



定义 1.3.3. 若存在固定点 O 和球面上的一条曲线 $A(v)$, 使曲面可写成

$$P(u, v) = O + uA(v),$$

则称其为**圆锥面**。其中固定点 O 称为顶点, 参数曲线 $u \mapsto O + uA(v)$ 是圆锥面的母



线。



定义 1.3.4. 若存在固定方向向量 a 和一条空间曲线 $\gamma(v)$, 使曲面可写成

$$P(u, v) = \gamma(v) + ua,$$

则称其为**柱面**。圆锥面与柱面都是典型的可展直纹面。



定理 1.3.1. 对平面简单闭凸曲线, 若以弧长参数 s 表示, 并以逆时针方向取向, 则其相对曲率满足

$$\kappa_r(s) > 0, \quad \int_0^L \kappa_r(s) ds = 2\pi.$$

这说明沿曲线走一周时, 单位切向量总共转过一整圈。



定理 1.3.2. Fenchel 不等式: 任意空间简单闭曲线的总曲率满足

$$\int \kappa(s) ds \geq 2\pi.$$

当且仅当该曲线是一条平面凸曲线时取等号。这个定理正是“切线标线长度至少为一个大圆长度”的几何表达。



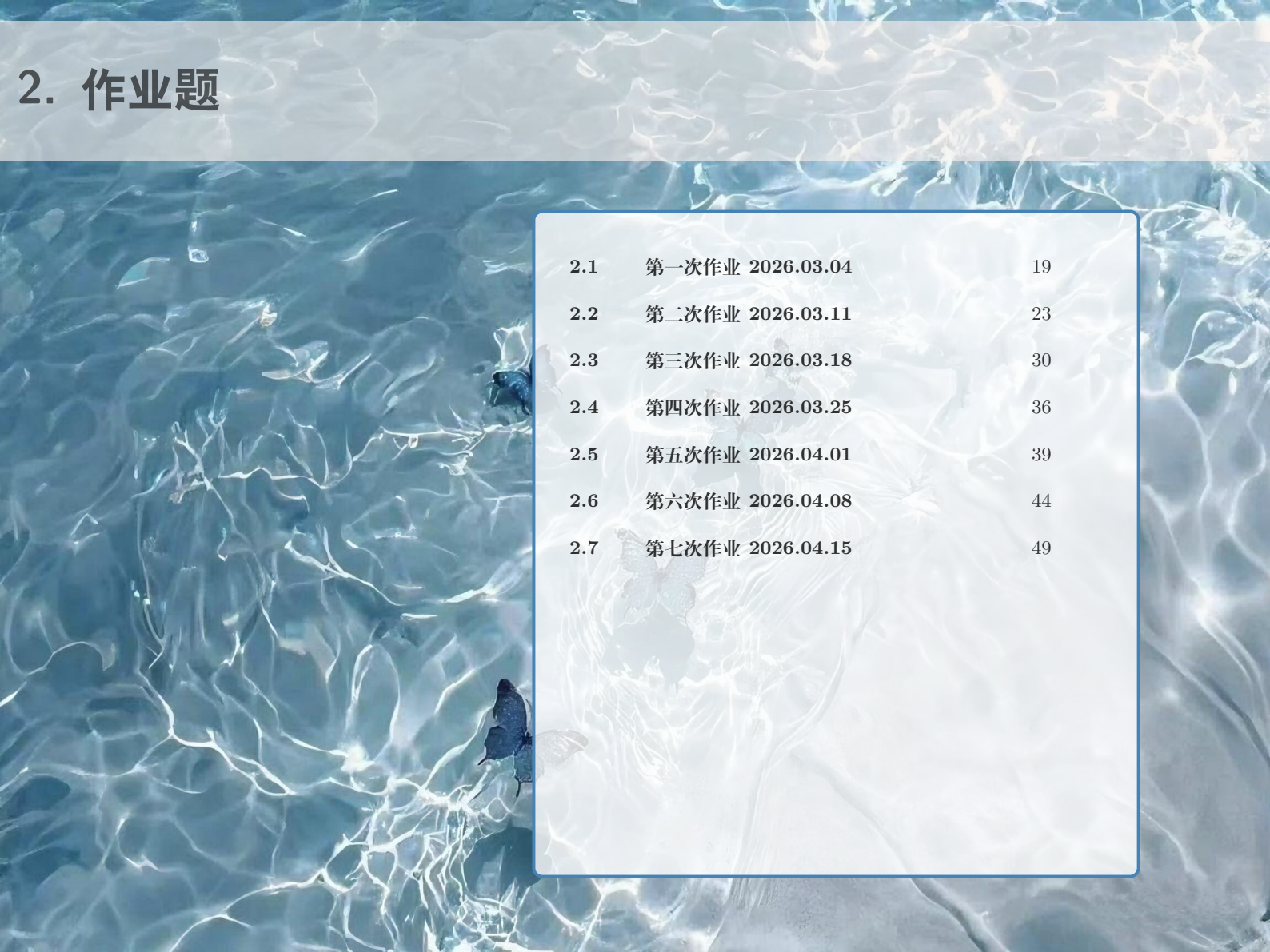
 **注.** 图形曲面 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处若满足

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0,$$

则该点处的切平面是水平面。此时第二基本形式基本上就是 *Hessian*

$$f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2$$

的归一化版本, 因此用它来判断法曲率、脐点或极值性质通常最直接。



2. 作业题

2.1	第一次作业 2026.03.04	19
2.2	第二次作业 2026.03.11	23
2.3	第三次作业 2026.03.18	30
2.4	第四次作业 2026.03.25	36
2.5	第五次作业 2026.04.01	39
2.6	第六次作业 2026.04.08	44
2.7	第七次作业 2026.04.15	49

2.1 第一次作业 2026.03.04

习题 2.1.1 (Chapter2,4). 求曲线：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = x \end{cases} \quad (2.1)$$

的参数方程.



Solution. 由方程

$$x^2 + y^2 = x$$

可知

$$x \geq 0, \quad z^2 = 1 - x.$$

因此若取参数 t , 令

$$x = \cos^2 t, \quad y = \sin t \cos t, \quad z = \sin t,$$

则

$$x^2 + y^2 = \cos^4 t + \sin^2 t \cos^2 t = \cos^2 t = x,$$

且

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

当 $t \in [0, \pi]$ 时, $z = \sin t \geq 0$, 故满足上半球条件。

所以该曲线可取参数方程为

$$P(t) = (\cos^2 t, \sin t \cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

□

 注. 思路: 交线参数化先处理较简单的平面投影圆, 再利用球面方程补出第三坐标。关键约束是 $z \geq 0$ 。

习题 2.1.2 (Chapter 2, 5). 计算下列曲线从 $t = 0$ 起的弧长。

$$(1) P(t) = (a \cos t, a \sin t, b)$$

$$(2) P(t) = (a \cosh t, a \sinh t, at)$$

$$(3) P(t) = (a \cos t, a \ln(\sec t + \tan t) - a \sin t)$$



Solution. 弧长函数均由

$$s(t) = \int_0^t |P'(\xi)| d\xi$$

给出。

对于 (1),

$$P'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0), \quad |P'(t)| = a.$$

故

$$s(t) = \int_0^t a d\xi = at.$$

对于 (2),

$$P'(t) = (a \sinh t, a \cosh t, a),$$

从而

$$|P'(t)|^2 = a^2(\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1) = 2a^2 \cosh^2 t.$$

因此当 $t \geq 0$ 时,

$$|P'(t)| = a\sqrt{2} \cosh t,$$

于是

$$s(t) = a\sqrt{2} \int_0^t \cosh \xi d\xi = a\sqrt{2} \sinh t.$$

对于 (3), 先求导:

$$P'(t) = \left(-a \sin t, a \frac{d}{dt} \ln(\sec t + \tan t) - a \cos t \right).$$

利用

$$\frac{d}{dt} \ln(\sec t + \tan t) = \sec t$$

得

$$P'(t) = (-a \sin t, a(\sec t - \cos t)) = \left(-a \sin t, a \frac{\sin^2 t}{\cos t}\right).$$

故

$$|P'(t)|^2 = a^2 \sin^2 t + a^2 \frac{\sin^4 t}{\cos^2 t} = a^2 \sin^2 t \left(1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right) = a^2 \tan^2 t.$$

在通常考虑的区间 $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ 上, $|P'(t)| = a \tan t$, 于是

$$s(t) = a \int_0^t \tan \xi d\xi = -a \ln(\cos t) = a \ln(\sec t).$$

□

 注. 关键定理: 弧长公式 $s(t) = \int |P'(t)| dt$. 计算时只需先求速度, 再做初等积分。

习题 2.1.3 (Chapter2,6). 求以下曲线的单位切向量场.

(1) $P(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), a > 0$

(2) $P(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$



Solution. 单位切向量场定义为

$$T(t) = \frac{P'(t)}{|P'(t)|}.$$

对于 (1),

$$P'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b),$$

因而

$$|P'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

所以

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a \sin t, a \cos t, b).$$

对于 (2), 记 $c = \cos t, s = \sin t$, 则

$$P'(t) = (-3c^2 s, 3s^2 c, -4sc) = sc(-3c, 3s, -4).$$

因而

$$|P'(t)| = 5|sc|.$$

所以在曲线正则的区间上 (即 $\sin t \cos t \neq 0$),

$$T(t) = \frac{sc}{|sc|} \cdot \frac{1}{5}(-3 \cos t, 3 \sin t, -4).$$

也就是说, 在每个不含 $t = \frac{k\pi}{2}$ 的连通区间上, 单位切向量可写为上式; 而在 $t = \frac{k\pi}{2}$ 处有 $P'(t) = 0$, 曲线不是正则曲线, 因此该处单位切向量场无定义。 □

 注. 思路: 单位切向量场的定义就是 $T = P'/|P'|$. 若曲线在某些点不正则, 则该点的单位切向量无定义。

习题 2.1.4 (Chapter2,8). 求曲线 $P = P(t)$ 使得 $P(0) = (1, 0, -5), P'(t) = (t^2, t, e^t)$



Solution. 由

$$P'(t) = (t^2, t, e^t)$$

对各分量积分可得

$$P(t) = \left(\frac{t^3}{3} + C_1, \frac{t^2}{2} + C_2, e^t + C_3 \right).$$

再由初值条件 $P(0) = (1, 0, -5)$, 得到

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad 1 + C_3 = -5.$$

故 $C_3 = -6$ 。于是

$$P(t) = \left(1 + \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}, e^t - 6 \right).$$

□

 注. 关键方法: 逐分量积分并用初值确定积分常数。这类题本质上是向量值初值问题。

2.2 第二次作业 2026.03.11

习题 2.2.1 (思考题). $P(s), \kappa(s) = \frac{1}{R}, \tau(s) = 0$, 证明: $P(s)$ 是圆.



Solution. 由于 $\tau(s) = 0$, 由 Frenet 公式

$$B'(s) = -\tau(s)N(s) = 0$$

可知副法向量 $B(s)$ 为常向量。因此

$$\frac{d}{ds}\langle P(s), B \rangle = \langle T(s), B \rangle = 0,$$

故曲线 $P(s)$ 全部落在某个垂直于常向量 B 的固定平面内。

再考虑向量场

$$C(s) = P(s) + RN(s).$$

由 Frenet 公式

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

得

$$C'(s) = T(s) + R(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)) = (1 - R\kappa(s))T(s) + R\tau(s)B(s) = 0.$$

因为 $\kappa(s) = \frac{1}{R}, \tau(s) = 0$. 所以 $C(s)$ 是常向量, 记为 C_0 .

于是

$$P(s) - C_0 = -RN(s),$$

从而

$$|P(s) - C_0| = R.$$

即 $P(s)$ 在上述固定平面内, 并且到定点 C_0 的距离恒为 R , 所以它是一条半径为 R 的圆。□

 **注.** 关键定理: Frenet 公式。当 $\tau = 0$ 时副法向量不变, 曲线落在固定平面内; 再由 $P + RN$ 为常向量得到圆心。

习题 2.2.2 (思考题). r, h, w 为常数且 $r > 0, w = (r^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}}$, 其中曲线曲率为 $\kappa(s) = w^2 r$, 挠率为 $\tau(s) = w^2 h$, 证明: 该曲线为圆柱螺线.



Solution. 已知曲率、挠率均为常数:

$$\kappa = w^2 r, \quad \tau = w^2 h.$$

先构造向量

$$e = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}.$$

由于 κ, τ 为常数, 故

$$e' = \frac{\tau T' + \kappa B'}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \frac{\tau \kappa N - \kappa \tau N}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = 0.$$

所以 e 是常向量。

又因为

$$\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = w^2 \sqrt{r^2 + h^2} = w,$$

所以

$$\langle T, e \rangle = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = hw,$$

是常数。于是曲线的切向量与固定方向 e 夹角恒定，故该曲线是一条广义螺线。

下面证明它实际上是圆柱螺线。取坐标系使得 e 为 z 轴方向，则

$$z'(s) = \langle T, e \rangle = hw,$$

从而

$$z(s) = hws + z_0.$$

再看曲线在垂直于 e 的平面上的投影 $\beta(s)$ 。其速度满足

$$|\beta'(s)|^2 = |T|^2 - \langle T, e \rangle^2 = 1 - h^2 w^2 = r^2 w^2.$$

因而投影曲线是常速曲线，速度为 rw 。

再注意到

$$\beta''(s) = \kappa N(s),$$

因为 $N \perp e$ 。于是投影曲线的平面曲率为

$$\kappa_\beta = \frac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3} = \frac{rw \cdot \kappa}{(rw)^3} = \frac{\kappa}{r^2 w^2} = \frac{w^2 r}{r^2 w^2} = \frac{1}{r}.$$

常速且曲率恒为 $\frac{1}{r}$ 的平面曲线必为半径 r 的圆。

因此，原曲线沿固定轴方向匀速上升，而其垂直投影是一条半径为 r 的圆，所以该曲线是半径为 r 、螺距参数由 h 决定的圆柱螺线。□

 注. 思路：常曲率常挠率曲线往往先找一个不随参数变化的向量，再研究曲线投影。这里投影成圆，因此原曲线是圆柱螺线。

习题 2.2.3 (Chapter2,9). 建立 $\mathbb{R}^2$ 中圆与悬链线 $y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$ 的自然方程。



Solution. 平面曲线的自然方程就是把曲率写成弧长参数 s 的函数。

对于半径为 R 的圆，其曲率恒为常数，

$$\kappa(s) \equiv \frac{1}{R}.$$

这就是圆的自然方程。

对于悬链线

$$y = a \cosh \frac{x}{a},$$

有

$$y' = \sinh \frac{x}{a}, \quad y'' = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}.$$

因而曲率为

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{a} \cosh(x/a)}{(1 + \sinh^2(x/a))^{3/2}} = \frac{1}{a \cosh^2(x/a)}.$$

再求弧长参数。若以顶点对应 $s = 0$ ，则

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{\xi}{a}} d\xi = \int_0^x \cosh \frac{\xi}{a} d\xi = a \sinh \frac{x}{a}.$$

因此

$$\cosh^2 \frac{x}{a} = 1 + \sinh^2 \frac{x}{a} = 1 + \frac{s^2}{a^2} = \frac{a^2 + s^2}{a^2}.$$

代回上式得

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + s^2}.$$

所以自然方程为:

$$\kappa(s) = \frac{1}{R} \quad (\text{圆})$$

和

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + s^2} \quad (\text{悬链线}).$$

□

 注. 关键概念: 自然方程就是 $\kappa = \kappa(s)$ 。圆的自然方程是常数, 悬链线则要把 x 改写成弧长 s 。

习题 2.2.4 (Chapter2,11). 求以下曲线的曲率.

(1) $P = (a \cosh t, a \sinh t, at)$

(2) $P = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$

(3) $P = (a(3t - t^3), 3at^2, a(3t + t^3))$

(4) $P = (a(1 - \sin t), a(1 - \cos t), bt)$



Solution. 统一使用公式

$$\kappa(t) = \frac{|P'(t) \times P''(t)|}{|P'(t)|^3}.$$

对于 (1),

$$P'(t) = (a \sinh t, a \cosh t, a), \quad P''(t) = (a \cosh t, a \sinh t, 0).$$

从而

$$P'(t) \times P''(t) = (-a^2 \sinh t, a^2 \cosh t, -a^2),$$

因此

$$|P'(t) \times P''(t)| = a^2 \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1} = a^2 \sqrt{2} \cosh t.$$

又

$$|P'(t)| = a\sqrt{2} \cosh t.$$

故

$$\kappa(t) = \frac{1}{2a \cosh^2 t}.$$

对于 (2), 记 $c = \cos t, s = \sin t$, 则

$$P'(t) = (-3c^2 s, 3s^2 c, -4sc) = sc(-3c, 3s, -4).$$

因而

$$|P'(t)| = 5|sc|.$$

进一步计算可得

$$|P'(t) \times P''(t)| = 15s^2c^2.$$

所以在正则区间 $\sin t \cos t \neq 0$ 上,

$$\kappa(t) = \frac{15s^2c^2}{(5|sc|)^3} = \frac{3}{25|\sin t \cos t|}.$$

对于 (3),

$$P'(t) = 3a(1 - t^2, 2t, 1 + t^2), \quad P''(t) = 6a(-t, 1, t).$$

直接计算可得

$$|P'(t) \times P''(t)| = 36a^2(t^2 + 1), \quad |P'(t)| = 3a\sqrt{2}(t^2 + 1).$$

因而

$$\kappa(t) = \frac{36a^2(t^2 + 1)}{(3a\sqrt{2}(t^2 + 1))^3} = \frac{1}{3a(t^2 + 1)^2}.$$

对于 (4), 原题公式显然有一处排版缺失; 按通常写法应理解为

$$P(t) = (a(1 - \sin t), a(1 - \cos t), bt).$$

此时

$$P'(t) = (-a \cos t, a \sin t, b), \quad P''(t) = (a \sin t, a \cos t, 0).$$

所以

$$|P'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

且

$$|P'(t) \times P''(t)| = a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

因而

$$\kappa(t) = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

□

 注. 关键公式: $\kappa = \frac{|P' \times P''|}{|P'|^3}$ 。多小题时统一套同一个公式最省事。

习题 2.2.5 (Chapter2,13). 求

$$\begin{cases} x + \sinh x = y + \sin y \\ z + e^z = (x + 1) + \ln(x + 1) \end{cases}$$

在 $(0, 0, 0)$ 处的曲率和 *Frenet* 框架.



Solution. 由隐函数定理, 曲线在原点附近可写成

$$P(x) = (x, y(x), z(x)).$$

先求 $y'(0), y''(0)$ 。由

$$x + \sinh x = y + \sin y$$

两边对 x 求导, 得

$$1 + \cosh x = (1 + \cos y)y'.$$

在 $x = 0, y = 0$ 处代入, 得到

$$2 = 2y'(0),$$

故

$$y'(0) = 1.$$

再求导一次:

$$\sinh x = -\sin y (y')^2 + (1 + \cos y)y''.$$

在原点代入得

$$0 = 2y''(0),$$

故

$$y''(0) = 0.$$

再求 $z'(0), z''(0)$ 。由

$$z + e^z = x + 1 + \ln(x + 1)$$

对 x 求导:

$$(1 + e^z)z' = 1 + \frac{1}{x + 1}.$$

在原点代入, 得

$$2z'(0) = 2,$$

所以

$$z'(0) = 1.$$

再求导一次:

$$e^z(z')^2 + (1 + e^z)z'' = -\frac{1}{(x + 1)^2}.$$

在原点代入, 得到

$$1 + 2z''(0) = -1,$$

故

$$z''(0) = -1.$$

因而

$$P'(0) = (1, 1, 1), \quad P''(0) = (0, 0, -1).$$

曲率为

$$\kappa(0) = \frac{|P'(0) \times P''(0)|}{|P'(0)|^3}.$$

计算

$$P'(0) \times P''(0) = (-1, 1, 0),$$

所以

$$|P'(0) \times P''(0)| = \sqrt{2}, \quad |P'(0)| = \sqrt{3}.$$

故

$$\kappa(0) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

再求 Frenet 标架。单位切向量为

$$T(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

主法向量由 $P''(0)$ 去掉切向分量后归一化得到:

$$P''(0) - \langle P''(0), T(0) \rangle T(0) = (0, 0, -1) + \frac{1}{3}(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

归一化后

$$N(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

最后

$$B(0) = T(0) \times N(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0).$$

因此原点处的 Frenet 标架为

$$T(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad N(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \quad B(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0).$$

□

 注. 思路: 隐式关系先局部解成显式函数, 再在基点求导。Frenet 标架只需要一、二阶导数在该点的值。

习题 2.2.6 (Chapter2,15).

$$P(t) = \begin{cases} (e^{-\frac{1}{t^2}}, t, 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \\ (0, t, e^{-\frac{1}{t^2}}), & t > 0 \end{cases}$$

证明: 该曲线为正则曲线, 并且在 $t = 0$ 处曲率为 0. 求该曲线在 $t \neq 0$ 处的 Frenet 标架, 考虑它在 $\rightarrow \pm 0$ 处的极限.



Solution. 先证明正则性. 对 $t < 0$,

$$P'(t) = \left(\frac{2}{t^3}e^{-1/t^2}, 1, 0\right).$$

对 $t > 0$,

$$P'(t) = \left(0, 1, \frac{2}{t^3}e^{-1/t^2}\right).$$

由于 e^{-1/t^2} 比任何幂函数都衰减得快, 所以

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{2}{t^3}e^{-1/t^2} = 0.$$

因而

$$P'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t) - P(0)}{t} = (0, 1, 0).$$

于是对所有 t 都有 $P'(t) \neq 0$, 所以该曲线是正则曲线。

再看 $t = 0$ 处曲率. 由于 e^{-1/t^2} 在 0 点各阶导数都为 0, 故

$$P''(0) = 0.$$

因而

$$\kappa(0) = \frac{|P'(0) \times P''(0)|}{|P'(0)|^3} = 0.$$

下面求 $t \neq 0$ 时的 Frenet 标架。记

$$\phi(t) = e^{-1/t^2}, \quad \phi'(t) = \frac{2}{t^3}e^{-1/t^2}, \quad \phi''(t) = \left(\frac{4}{t^6} - \frac{6}{t^4}\right)e^{-1/t^2}.$$

当 $t < 0$ 时, 曲线在平面 $z = 0$ 内,

$$P(t) = (\phi(t), t, 0), \quad P'(t) = (\phi'(t), 1, 0).$$

所以

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi'(t)^2}}(\phi'(t), 1, 0).$$

由于

$$P''(t) = (\phi''(t), 0, 0),$$

且

$$T'(t) = \frac{\phi''(t)}{(1 + \phi'(t)^2)^{3/2}}(1, -\phi'(t), 0),$$

因而

$$\kappa(t) = \frac{|\phi''(t)|}{(1 + \phi'(t)^2)^{3/2}}.$$

所以 Frenet 标架应写成

$$N(t) = \operatorname{sgn}(\phi''(t)) \frac{1}{\sqrt{1 + \phi'(t)^2}}(1, -\phi'(t), 0), \quad B(t) = \operatorname{sgn}(\phi''(t))(0, 0, -1),$$

这样定义时恒有 $N = T'/|T'|$ 。

当 $t > 0$ 时, 曲线在平面 $x = 0$ 内,

$$P(t) = (0, t, \phi(t)), \quad P'(t) = (0, 1, \phi'(t)).$$

因而

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi'(t)^2}}(0, 1, \phi'(t)),$$

且

$$P''(t) = (0, 0, \phi''(t)),$$

从而

$$T'(t) = \frac{\phi''(t)}{(1 + \phi'(t)^2)^{3/2}}(0, -\phi'(t), 1).$$

因此

$$N(t) = \operatorname{sgn}(\phi''(t)) \frac{1}{\sqrt{1 + \phi'(t)^2}}(0, -\phi'(t), 1), \quad B(t) = \operatorname{sgn}(\phi''(t))(1, 0, 0).$$

最后考察极限。由于当 $t \rightarrow 0^\pm$ 时有 $\phi''(t) > 0$, 且 $\phi'(t) \rightarrow 0$, 所以

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} T(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t) = (0, 1, 0).$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^-} N(t) &= (1, 0, 0), & \lim_{t \rightarrow 0^+} N(t) &= (0, 0, 1), \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} B(t) &= (0, 0, -1), & \lim_{t \rightarrow 0^+} B(t) &= (1, 0, 0). \end{aligned}$$

因此, 该曲线在 $t = 0$ 虽然切向量连续, 并且曲率为 0, 但左右两侧的 Frenet 标架极限并不相同。□

 注. 关键点: e^{-1/t^2} 在 0 点是典型的平坦函数。它保证曲率在 0 处为零, 但左右 Frenet 标架未必拼起来。

2.3 第三次作业 2026.03.18

习题 2.3.1 (思考题, Bouquet 公式的推广). s 为正则曲线的弧长参数, $P_0 = P(0), \kappa(0) \neq 0$, 则有 $P(s) = P_0 + x(s)T_0 + y(s)N_0 + z(s)B_0$.



Solution. 这是标准 Bouquet 公式的三维推广。记

$$T_0 = T(0), \quad N_0 = N(0), \quad B_0 = B(0), \quad \kappa_0 = \kappa(0), \quad \tau_0 = \tau(0).$$

因为 s 是弧长参数, 所以

$$P'(s) = T(s).$$

在 $s = 0$ 处对 T 作 Taylor 展开。由 Frenet 公式

$$T' = \kappa N$$

得

$$T'(0) = \kappa_0 N_0.$$

再求一次导数:

$$T'' = \kappa' N + \kappa N' = \kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B).$$

因而

$$T''(0) = -\kappa_0^2 T_0 + \kappa_0' N_0 + \kappa_0 \tau_0 B_0.$$

所以

$$T(s) = T_0 + s\kappa_0 N_0 + \frac{s^2}{2}(-\kappa_0^2 T_0 + \kappa_0' N_0 + \kappa_0 \tau_0 B_0) + o(s^2).$$

对上式从 0 到 s 积分, 得到

$$P(s) - P_0 = sT_0 + \frac{\kappa_0}{2}s^2 N_0 + \frac{s^3}{6}(-\kappa_0^2 T_0 + \kappa_0' N_0 + \kappa_0 \tau_0 B_0) + o(s^3).$$

于是

$$P(s) = P_0 + x(s)T_0 + y(s)N_0 + z(s)B_0$$

其中

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3 + o(s^3), \\ y(s) &= \frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6}s^3 + o(s^3), \\ z(s) &= \frac{\kappa_0 \tau_0}{6}s^3 + o(s^3). \end{aligned}$$

这正是 Bouquet 公式在空间曲线情形下的展开。□

 **注.** 关键定理: Frenet 公式与 Taylor 展开. Bouquet 公式本质上是把位置向量在初始 Frenet 标架下做局部展开。

习题 2.3.2 (Chapter2,16). 将曲线 $P(t) = P_0 + ta + \frac{1}{2}\kappa t^2 b + \frac{1}{6}Nt^3 c$ 在 $t = 0$ 处化为标准型, 其中 $\{P_0; a, b, c\}$ 是一个右手么正标架, 在这里自然假定在 $t = 0$ 处密切平面非退化 ($\kappa \neq 0$).



Solution. 由于 $\{a, b, c\}$ 是右手幺正标架, 所以存在一个刚体运动把

$$P_0 \mapsto 0, \quad a \mapsto e_1, \quad b \mapsto e_2, \quad c \mapsto e_3.$$

在这个刚体运动之下, 曲线变成

$$\tilde{P}(t) = \left(t, \frac{\kappa}{2}t^2, \frac{N}{6}t^3 \right).$$

这已经是 $t = 0$ 附近的标准型。

为了说明其几何意义, 再计算它在 $t = 0$ 处的曲率和挠率。由

$$\tilde{P}'(0) = (1, 0, 0), \quad \tilde{P}''(0) = (0, \kappa, 0), \quad \tilde{P}'''(0) = (0, 0, N),$$

得

$$\kappa(0) = \frac{|\tilde{P}'(0) \times \tilde{P}''(0)|}{|\tilde{P}'(0)|^3} = \kappa.$$

又因为

$$\tau(0) = \frac{\det(\tilde{P}'(0), \tilde{P}''(0), \tilde{P}'''(0))}{|\tilde{P}'(0) \times \tilde{P}''(0)|^2} = \frac{\kappa N}{\kappa^2} = \frac{N}{\kappa}.$$

若记 $\tau(0) = \tau_0$, 则 $N = \kappa\tau_0$, 于是标准型也可以写成

$$\tilde{P}(t) = \left(t, \frac{\kappa}{2}t^2, \frac{\kappa\tau_0}{6}t^3 \right).$$

□

 **注.** 思路: 所谓标准型, 就是先通过刚体运动把起点和初始标架化到标准位置, 再读取曲率与挠率信息。

习题 2.3.3 (Chapter2,33). 求曲线 $P(t) = (t, \frac{1}{2}at^2, \frac{1}{6}abt^3)$, $a > 0, b \neq 0$ 在 $t = 0$ 处的 Frenet 标架、曲率、挠率.



Solution. 先求各阶导数:

$$P'(t) = \left(1, at, \frac{1}{2}abt^2 \right), \quad P''(t) = (0, a, abt), \quad P'''(t) = (0, 0, ab).$$

在 $t = 0$ 处有

$$P'(0) = (1, 0, 0), \quad P''(0) = (0, a, 0), \quad P'''(0) = (0, 0, ab).$$

因为 $|P'(0)| = 1$, 所以

$$T(0) = \frac{P'(0)}{|P'(0)|} = (1, 0, 0).$$

再由 $P''(0)$ 的方向就是主法向方向, 得到

$$N(0) = \frac{P''(0)}{|P''(0)|} = (0, 1, 0).$$

因而

$$B(0) = T(0) \times N(0) = (0, 0, 1).$$

曲率为

$$\kappa(0) = \frac{|P'(0) \times P''(0)|}{|P'(0)|^3} = |(1, 0, 0) \times (0, a, 0)| = a.$$

挠率由公式

$$\tau(0) = \frac{\det(P'(0), P''(0), P'''(0))}{|P'(0) \times P''(0)|^2}$$

给出。直接代入得

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix} = a^2 b,$$

而

$$|P'(0) \times P''(0)|^2 = a^2.$$

所以

$$\tau(0) = b.$$

综上, $t = 0$ 处的 Frenet 标架和曲率、挠率为

$$T(0) = (1, 0, 0), \quad N(0) = (0, 1, 0), \quad B(0) = (0, 0, 1),$$

$$\kappa(0) = a, \quad \tau(0) = b.$$

□

 注. 关键方法: 求到三阶导数。因为挠率公式需要用到三阶导数的行列式。

习题 2.3.4 (Chapter2,47). 证明: $P(t) = (t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, \sqrt{3}t - \sin t)$ 和 $P_1(u) = (2 \cos \frac{u}{2}, 2 \sin \frac{u}{2}, -u)$ 是合同的.



Solution. 将第一条曲线写成

$$P(t) = 2 \cos t e_1 + 2 \sin t e_2 + 2t e_3,$$

其中取三组单位正交向量

$$e_1 = (0, 1, 0), \quad e_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right), \quad e_3 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

容易验证

$$|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1, \quad \langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad (i \neq j).$$

于是

$$2 \cos t e_1 + 2 \sin t e_2 + 2t e_3 = (t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, \sqrt{3}t - \sin t) = P(t).$$

再看第二条曲线。令

$$u = -2t,$$

则

$$P_1(-2t) = (2 \cos t, -2 \sin t, 2t).$$

设 A 为把标准正交基

$$E_1 = (1, 0, 0), \quad -E_2 = (0, -1, 0), \quad E_3 = (0, 0, 1)$$

分别映到 e_1, e_2, e_3 的正交变换。则

$$A(P_1(-2t)) = 2 \cos t e_1 + 2 \sin t e_2 + 2t e_3 = P(t).$$

因而

$$P(t) = A(P_1(-2t)),$$

即两条曲线相差一个参数替换和一个正交变换，从而它们合同。□

 注. 思路：合同题通常不是硬算曲率挠率，而是先看能否写成某个正交基下的统一形式。

习题 2.3.5 (Chapter2,48). 证明: $C_1: P = (\cosh t, \sinh t, t)$ 与 $C_2: P = (\frac{e^{-u}}{\sqrt{2}}, \frac{e^u}{\sqrt{2}}, u+1)$ 在 E^3 的一个刚体运动下是合同的，求使 C_1 和 C_2 合同的刚体运动.

Solution. 观察到

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

因而若定义线性变换

$$A(x, y, z) = \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}, z \right),$$

则 A 是绕 z 轴旋转 $\frac{\pi}{4}$ 的正交变换。对 C_1 上的点作用 A ，得到

$$A(\cosh t, \sinh t, t) = \left(\frac{\cosh t - \sinh t}{\sqrt{2}}, \frac{\cosh t + \sinh t}{\sqrt{2}}, t \right) = \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}, \frac{e^t}{\sqrt{2}}, t \right).$$

再作平移

$$b = (0, 0, 1),$$

即定义刚体运动

$$\Phi(x, y, z) = A(x, y, z) + b = \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}, z+1 \right).$$

则

$$\Phi(\cosh t, \sinh t, t) = \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}, \frac{e^t}{\sqrt{2}}, t+1 \right).$$

令 $u = t$ ，便正好得到

$$C_2(u) = \left(\frac{e^{-u}}{\sqrt{2}}, \frac{e^u}{\sqrt{2}}, u+1 \right).$$

所以 C_1 与 C_2 在刚体运动

$$\Phi(x, y, z) = \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}, z+1 \right)$$

下合同。□

 注. 关键定理：刚体运动由正交变换加平移组成。这里先旋转，再平移，即可直接匹配参数式。

习题 2.3.6 (Chapter2,54). 求渐近线

$$(1) \quad x^2 + y^2 = a^2$$

$$(2) \quad y = a \cdot \cosh \frac{s}{a}$$

$$(3) P(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$



Solution. 设原曲线已用弧长参数 s 表示, 单位切向量为 $T(s)$ 。以 $s = 0$ 为起点的渐伸线由

$$\tilde{P}(s) = P(s) - sT(s)$$

给出。

对于 (1), 圆可取弧长参数表示为

$$P(s) = \left(a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a} \right),$$

从而

$$T(s) = \left(-\sin \frac{s}{a}, \cos \frac{s}{a} \right).$$

故其渐伸线为

$$\tilde{P}(s) = \left(a \cos \frac{s}{a} + s \sin \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a} - s \cos \frac{s}{a} \right).$$

对于 (2), 题中把悬链线写成弧长参数形式。由悬链线的标准弧长参数化

$$P(s) = \left(a \operatorname{arsinh} \frac{s}{a}, \sqrt{a^2 + s^2} \right)$$

可知

$$T(s) = P'(s) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}}, \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}} \right).$$

因而渐伸线为

$$\tilde{P}(s) = \left(a \operatorname{arsinh} \frac{s}{a} - \frac{as}{\sqrt{a^2 + s^2}}, \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + s^2}} \right).$$

这正是一条牵引线 (tractrix) 的参数方程。

对于 (3), 先求弧长。已知

$$P(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad P'(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

所以

$$|P'(t)| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2 \cos t} = 2 \sin \frac{t}{2}$$

(在 $0 \leq t \leq 2\pi$ 上成立)。于是

$$s(t) = \int_0^t 2 \sin \frac{\xi}{2} d\xi = 4 \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right).$$

单位切向量为

$$T(t) = \frac{P'(t)}{|P'(t)|} = \left(\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2} \right).$$

所以渐伸线为

$$\tilde{P}(t) = P(t) - s(t)T(t).$$

代入得

$$\tilde{x}(t) = t - \sin t - 4 \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right) \sin \frac{t}{2} = t + \sin t - 4 \sin \frac{t}{2},$$

$$\tilde{y}(t) = 1 - \cos t - 4 \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right) \cos \frac{t}{2} = 2 \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right)^2.$$

因而可取

$$\tilde{P}(t) = \left(t + \sin t - 4 \sin \frac{t}{2}, 2 \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right)^2 \right).$$

□

 注. 关键公式: 渐伸线公式 $\tilde{P} = P - sT$ 。一旦原曲线已是弧长参数, 代入后只剩代数化简。

2.4 第四次作业 2026.03.25

习题 2.4.1 (思考题). $\kappa_r(s)$ 为相对曲率, $\kappa_r(s) = \langle \frac{d\alpha(s)}{ds}, \beta(s) \rangle$, 如果平面曲线的正则参数不一定为弧长参数, 则 $\kappa_r(t) = ?$



Solution. 设平面曲线用一般正则参数 t 表示为 $P(t)$, 其单位切向量记为

$$\alpha(t) = \frac{P'(t)}{|P'(t)|},$$

与之正交的单位法向量记为 $\beta(t)$ 。若 s 是弧长参数, 则

$$\kappa_r(s) = \left\langle \frac{d\alpha}{ds}, \beta \right\rangle.$$

由于

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha/dt}{ds/dt} = \frac{1}{|P'(t)|} \frac{d\alpha}{dt},$$

所以对一般参数 t 有

$$\kappa_r(t) = \left\langle \frac{d\alpha}{ds}, \beta \right\rangle = \frac{1}{|P'(t)|} \left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \beta(t) \right\rangle.$$

这就是相对曲率的一般参数表达式。

若把它进一步写成坐标形式, 设 $P(t) = (x(t), y(t))$, 则

$$\kappa_r(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

这正是平面曲线带符号曲率的常见公式。 □

注. 思路: 一般参数和弧长参数之间只差一个速度因子, 因此相对曲率公式通过链式法则立刻得到。

习题 2.4.2 (Chapter2,50). 求以下平面曲线的相对曲率 κ_r

(1) 椭圆: $P = (a \cos t, b \sin t), 0 \leq t < 2\pi$

(2) 双曲线: $P = (a \cosh t, b \sinh t)$

(3) 抛物线: $P = (t, t^2)$ 即 $y = x^2$

(4) 悬链线: $P = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$

(5) 拽物线: $P = (a \cos \varphi, a \ln(\sec \varphi + \tan \varphi) - a \sin \varphi)$, 其中 $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$



Solution. 统一使用公式

$$\kappa_r(t) = \frac{\det(P'(t), P''(t))}{|P'(t)|^3}.$$

对于 (1) 椭圆,

$$P'(t) = (-a \sin t, b \cos t), \quad P''(t) = (-a \cos t, -b \sin t).$$

因而

$$\det(P', P'') = ab,$$

$$|P'|^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t.$$

所以

$$\kappa_r(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

对于 (2) 双曲线,

$$P'(t) = (a \sinh t, b \cosh t), \quad P''(t) = (a \cosh t, b \sinh t).$$

从而

$$\det(P', P'') = ab(\sinh^2 t - \cosh^2 t) = -ab.$$

又

$$|P'|^2 = a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t.$$

故

$$\kappa_r(t) = -\frac{ab}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}}.$$

对于 (3) 抛物线,

$$P'(t) = (1, 2t), \quad P''(t) = (0, 2).$$

于是

$$\det(P', P'') = 2, \quad |P'|^2 = 1 + 4t^2.$$

所以

$$\kappa_r(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}.$$

对于 (4), 虽然题中写作“悬链线”, 但参数方程实际是摆线:

$$P(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)).$$

有

$$P'(t) = a(1 - \cos t, \sin t), \quad P''(t) = a(\sin t, \cos t).$$

所以

$$\begin{aligned} \det(P', P'') &= a^2(\cos t - 1) = -a^2(1 - \cos t), \\ |P'|^2 &= a^2(2 - 2\cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

因而在 $0 < t < 2\pi$ 上,

$$\kappa_r(t) = -\frac{1}{4a \sin(t/2)}.$$

对于 (5), 设参数为 φ ,

$$P(\varphi) = (a \cos \varphi, a \ln(\sec \varphi + \tan \varphi) - a \sin \varphi).$$

则

$$P'(\varphi) = (-a \sin \varphi, a(\sec \varphi - \cos \varphi)),$$

而

$$\sec \varphi - \cos \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

因此

$$|P'|^2 = a^2 \tan^2 \varphi.$$

继续计算可得

$$\det(P', P'') = -a^2 \tan^2 \varphi.$$

在 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 上有 $\tan \varphi > 0$, 从而

$$\kappa_r(\varphi) = -\frac{1}{a \tan \varphi}.$$

□



注. 关键公式: $\kappa_r = \frac{\det(P', P'')}{|P'|^3}$. 每条曲线只是在求导和化简上不同.

习题 2.4.3 (Chapter2,52). 相对曲率为 $\kappa_r(s) = \frac{1}{1+s^2}$, s 为弧长参数, 求平面曲线的曲线方程.



Solution. 因为 s 是弧长参数, 所以设切向角为 $\theta(s)$, 则

$$\theta'(s) = \kappa_r(s) = \frac{1}{1+s^2}.$$

积分得

$$\theta(s) = \arctan s + \theta_0.$$

经过一个整体刚体运动后, 可令 $\theta_0 = 0$, 于是

$$T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) = (\cos(\arctan s), \sin(\arctan s)) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \right).$$

由于 $P'(s) = T(s)$, 故

$$x'(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \quad y'(s) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}.$$

积分得到

$$\begin{aligned} x(s) &= \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \operatorname{arsinh} s + C_1, \\ y(s) &= \int \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} ds = \sqrt{1+s^2} + C_2. \end{aligned}$$

平移坐标后可取 $C_1 = C_2 = 0$, 于是

$$P(s) = (\operatorname{arsinh} s, \sqrt{1+s^2}).$$

消去参数: 由

$$x = \operatorname{arsinh} s$$

可得

$$s = \sinh x, \quad y = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \cosh x.$$

因而该曲线方程为

$$y = \cosh x.$$

若保留一般常数, 则所有解都与这条悬链线相差一个平移和刚体运动.

□



注. 关键思路: 先由曲率积分出切向角, 再由 $P'(s) = (\cos \theta, \sin \theta)$ 反求曲线.

2.5 第五次作业 2026.04.01

习题 2.5.1 (思考题). 求 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}$ 之间的关系.



Solution. 设曲面在参数 (u, v) 下的第一基本形式矩阵为

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

若作参数变换

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad v = v(\tilde{u}, \tilde{v}),$$

并记 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix},$$

那么新参数 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 下的切向量满足

$$\begin{pmatrix} P_{\tilde{u}} \\ P_{\tilde{v}} \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} P_u \\ P_v \end{pmatrix}.$$

因而第一基本形式矩阵按二次型变换法则变化, 即

$$\tilde{I} = J^T I J.$$

也就是说

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J.$$

展开后可写成

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= Eu_{\tilde{u}}^2 + 2Fu_{\tilde{u}}v_{\tilde{u}} + Gv_{\tilde{u}}^2, \\ \tilde{F} &= Eu_{\tilde{u}}u_{\tilde{v}} + F(u_{\tilde{u}}v_{\tilde{v}} + u_{\tilde{v}}v_{\tilde{u}}) + Gv_{\tilde{u}}v_{\tilde{v}}, \\ \tilde{G} &= Eu_{\tilde{v}}^2 + 2Fu_{\tilde{v}}v_{\tilde{v}} + Gv_{\tilde{v}}^2. \end{aligned}$$

□

 **注. 关键定理:** 第一基本形式在参数变换下按二次型合同变换。矩阵语言最清楚。

习题 2.5.2 (思考题). 证明: 曲面面积和参数选取无关.



Solution. 曲面面积元在参数 (u, v) 下为

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

设改用参数 $(\tilde{u}, \tilde{v})$, 由上一题可知

$$\tilde{I} = J^T I J,$$

其中 $J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}$.

两边取行列式，得到

$$\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = \det(\tilde{I}) = \det(J^T) \det(I) \det(J) = (\det J)^2 (EG - F^2).$$

因而

$$\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} = |\det J| \sqrt{EG - F^2}.$$

同时变量替换公式给出

$$du dv = |\det J| d\tilde{u} d\tilde{v}.$$

所以

$$\sqrt{EG - F^2} du dv = \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} d\tilde{u} d\tilde{v}.$$

这说明面积元在参数变换下保持不变，故对同一块曲面 S ,

$$A(S) = \iint \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} d\tilde{u} d\tilde{v}.$$

因此曲面面积与参数选取无关。 □

 注. 思路：面积元的变化规律和多元积分变量替换公式正好匹配，所以面积与参数无关。

习题 2.5.3 (Chapter3,2). 求下列曲面的第一基本形式

(1) $P = (u \cos v, u \sin v, \varphi(v))$

(2) $P = (u \cos v, u \sin v, \varphi(u) + av)$, 其中 a 为常数. 

Solution. 第一基本形式由

$$E = \langle P_u, P_u \rangle, \quad F = \langle P_u, P_v \rangle, \quad G = \langle P_v, P_v \rangle$$

给出。

对于 (1),

$$P(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \varphi(v)).$$

于是

$$P_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad P_v = (-u \sin v, u \cos v, \varphi'(v)).$$

所以

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + \varphi'(v)^2.$$

因而第一基本形式为

$$I = du^2 + (u^2 + \varphi'(v)^2) dv^2.$$

对于 (2),

$$P(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \varphi(u) + av).$$

从而

$$P_u = (\cos v, \sin v, \varphi'(u)), \quad P_v = (-u \sin v, u \cos v, a).$$

故

$$E = 1 + \varphi'(u)^2, \quad F = a\varphi'(u), \quad G = u^2 + a^2.$$

因而第一基本形式为

$$I = (1 + \varphi'(u)^2) du^2 + 2a\varphi'(u) du dv + (u^2 + a^2) dv^2.$$

□



注. 关键方法: 第一基本形式只看一阶偏导. 先求 P_u, P_v , 再做内积.

习题 2.5.4 (Chapter3,10). 设曲面 S 有参数方程: $P(x, y) = (x, y, f(x, y))$, 其中 $f(x, y)$ 三阶连续可导, 求 S 的法向量和第一基本形式.



Solution. 先求偏导:

$$P_x = (1, 0, f_x), \quad P_y = (0, 1, f_y).$$

因而一个法向量可由叉积给出:

$$P_x \times P_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1).$$

所以单位法向量可取

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1).$$

再求第一基本形式系数:

$$E = \langle P_x, P_x \rangle = 1 + f_x^2,$$

$$F = \langle P_x, P_y \rangle = f_x f_y,$$

$$G = \langle P_y, P_y \rangle = 1 + f_y^2.$$

因而第一基本形式为

$$I = (1 + f_x^2) dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2) dy^2.$$

□



注. 关键方法: 图形曲面题统一从 P_x, P_y 的叉积出发, 法向量和第一基本形式都能一次得到。

习题 2.5.5 (Chapter3,13). 已知曲面的第一基本形式: $I = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$, 求

(1) 曲线上的曲线 $u = v$ 从 v_1 到 v_2 的弧长.

(2) 曲线上的曲线 $u + v = 0$ 与 $u - v = 0$ 之间的夹角.

(3) 曲线上的曲线 $u = av, u = -av, v = 1$ 所围成的面积.



Solution. 已知

$$I = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2,$$

即

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + a^2.$$

对于 (1), 曲线 $u = v$ 可由参数 v 表示为

$$(u(v), v) = (v, v), \quad v \in [v_1, v_2].$$

因此

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2 = (1 + v^2 + a^2)dv^2.$$

弧长为

$$L = \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{v^2 + a^2 + 1} dv.$$

积分后得到

$$L = \frac{1}{2} \left[v\sqrt{v^2 + a^2 + 1} + (a^2 + 1) \ln \left| v + \sqrt{v^2 + a^2 + 1} \right| \right]_{v_1}^{v_2}.$$

对于 (2), 曲线 $u + v = 0$ 与 $u - v = 0$ 在 $(0, 0)$ 相交。它们在该点的切向量分别可取

$$X_1 = (1, -1), \quad X_2 = (1, 1).$$

由于在 $(0, 0)$ 处度量为

$$I = du^2 + a^2 dv^2,$$

故

$$\langle X_1, X_2 \rangle = 1 - a^2,$$

$$|X_1| = |X_2| = \sqrt{1 + a^2}.$$

所以夹角 θ 满足

$$\cos \theta = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}.$$

对于 (3), 所围区域为

$$D = \{(u, v) : 0 \leq v \leq 1, -av \leq u \leq av\}.$$

面积元为

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv = \sqrt{u^2 + a^2} du dv.$$

因而面积

$$A = \int_0^1 \int_{-av}^{av} \sqrt{u^2 + a^2} du dv.$$

由于被积函数关于 u 偶对称,

$$A = 2 \int_0^1 \int_0^{av} \sqrt{u^2 + a^2} du dv.$$

用积分公式

$$\int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{1}{2} \left(u\sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \right)$$

得

$$A = a^2 \int_0^1 \left(v\sqrt{1 + v^2} + \ln(v + \sqrt{1 + v^2}) \right) dv.$$

继续积分可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 v\sqrt{1 + v^2} dv &= \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}, \\ \int_0^1 \ln(v + \sqrt{1 + v^2}) dv &= \operatorname{arsinh} 1 - \sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

故

$$A = a^2 \left(\operatorname{arsinh} 1 + \frac{2 - \sqrt{2}}{3} \right).$$

□

 注. 思路: 给定第一基本形式后, 所有几何量都在参数平面上通过度量来算。

2.6 第六次作业 2026.04.08

习题 2.6.1 (Chapter3,14). 设曲面 S 有参数方程: $P(x, y) = (x, y, f(x, y))$, 其中 $f(x, y)$ 三阶连续可导, 求 S 的第二基本形式.



Solution. 与上一题一样,

$$P_x = (1, 0, f_x), \quad P_y = (0, 1, f_y),$$

且可取单位法向量

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1).$$

第二基本形式系数为

$$L = \langle P_{xx}, n \rangle, \quad M = \langle P_{xy}, n \rangle, \quad N = \langle P_{yy}, n \rangle.$$

由

$$P_{xx} = (0, 0, f_{xx}), \quad P_{xy} = (0, 0, f_{xy}), \quad P_{yy} = (0, 0, f_{yy}),$$

得

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

因而第二基本形式为

$$II = \frac{f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

□



注. 关键方法: 图形曲面的第二基本形式几乎就是 *Hessian* 除以法向量的归一化因子。

习题 2.6.2 (Chapter3,15). 求下列曲面的第二基本形式

$$(1) P = (a \cos \varphi \cos \theta, a \cos \varphi \sin \theta, b \sin \varphi)$$

$$(2) P = (u, v, \frac{1}{2}(u^2 + v^2))$$

$$(3) P = (a(u + v), a(u - v), 2uv)$$



Solution. 第二基本形式由

$$L = \langle P_{uu}, n \rangle, \quad M = \langle P_{uv}, n \rangle, \quad N = \langle P_{vv}, n \rangle$$

给出。

对于 (1), 设参数为 (φ, θ) , 则

$$P_\varphi = (-a \sin \varphi \cos \theta, -a \sin \varphi \sin \theta, b \cos \varphi),$$

$$P_\theta = (-a \cos \varphi \sin \theta, a \cos \varphi \cos \theta, 0).$$

取外法向量

$$n = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}(b \cos \varphi \cos \theta, b \cos \varphi \sin \theta, a \sin \varphi).$$

再算二阶偏导:

$$P_{\varphi\varphi} = (-a \cos \varphi \cos \theta, -a \cos \varphi \sin \theta, -b \sin \varphi),$$

$$P_{\varphi\theta} = (a \sin \varphi \sin \theta, -a \sin \varphi \cos \theta, 0),$$

$$P_{\theta\theta} = (-a \cos \varphi \cos \theta, -a \cos \varphi \sin \theta, 0).$$

因而

$$L = -\frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}, \quad M = 0,$$

$$N = -\frac{ab \cos^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}.$$

所以

$$II = -\frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi^2 - \frac{ab \cos^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} d\theta^2.$$

对于 (2),

$$P(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right).$$

有

$$P_u = (1, 0, u), \quad P_v = (0, 1, v),$$

所以可取单位法向量

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}(-u, -v, 1).$$

再由

$$P_{uu} = (0, 0, 1), \quad P_{uv} = (0, 0, 0), \quad P_{vv} = (0, 0, 1),$$

得

$$L = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

因而

$$II = \frac{du^2 + dv^2}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

对于 (3),

$$P(u, v) = (a(u+v), a(u-v), 2uv).$$

则

$$P_u = (a, a, 2v), \quad P_v = (a, -a, 2u).$$

取法向量

$$n = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (u+v)^2 + (u-v)^2}}(-(u+v), u-v, a).$$

再有

$$P_{uu} = (0, 0, 0), \quad P_{uv} = (0, 0, 2), \quad P_{vv} = (0, 0, 0).$$

因而

$$L = 0, \quad M = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + (u+v)^2 + (u-v)^2}}, \quad N = 0.$$

所以

$$II = \frac{4a}{\sqrt{a^2 + (u+v)^2 + (u-v)^2}} du dv.$$

□

 注. 思路: 第二基本形式题的步骤高度统一: 求法向量、求二阶偏导、做内积。

习题 2.6.3 (Chapter3,16). 设 $P_0 = P(s)$ (s 为弧长参数) 是曲率、挠率均为常数的曲线. 求以 $P(s)$ 为中心曲线的管状面 S_r 的第一与第二基本形式、主方向、主曲率、总曲率和平均曲率.



Solution. 设中心曲线的 Frenet 标架为 $\{T, N, B\}$, 曲率、挠率分别为常数 κ, τ . 管状面写成

$$X(s, \theta) = P(s) + r \cos \theta N(s) + r \sin \theta B(s),$$

其中 $0 < r < \frac{1}{\kappa}$.

记

$$e_r = \cos \theta N + \sin \theta B, \quad e_\theta = -\sin \theta N + \cos \theta B.$$

那么

$$X = P + r e_r.$$

由 Frenet 公式

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \tau B, \quad B' = -\tau N$$

可得

$$e_r' = -\kappa \cos \theta T + \tau e_\theta, \quad e_\theta' = \kappa \sin \theta T - \tau e_r.$$

因而

$$\begin{aligned} X_s &= T + r e_r' = (1 - r\kappa \cos \theta)T + r\tau e_\theta, \\ X_\theta &= r e_\theta. \end{aligned}$$

设

$$A = 1 - r\kappa \cos \theta.$$

则第一基本形式系数为

$$\begin{aligned} E &= \langle X_s, X_s \rangle = A^2 + r^2 \tau^2, \\ F &= \langle X_s, X_\theta \rangle = r^2 \tau, \\ G &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle = r^2. \end{aligned}$$

所以

$$I = (A^2 + r^2 \tau^2) ds^2 + 2r^2 \tau ds d\theta + r^2 d\theta^2.$$

取外法向量

$$n = e_r = \cos \theta N + \sin \theta B.$$

则

$$X_{s\theta} = r\kappa \sin \theta T - r\tau e_r, \quad X_{\theta\theta} = -r e_r,$$

并且

$$X_{ss} = A\kappa N - r\tau^2 e_r + (\text{切向部分}).$$

因此

$$\begin{aligned} L &= \langle X_{ss}, n \rangle = \kappa \cos \theta (1 - r\kappa \cos \theta) - r\tau^2, \\ M &= \langle X_{s\theta}, n \rangle = -r\tau, \\ N &= \langle X_{\theta\theta}, n \rangle = -r. \end{aligned}$$

所以

$$II = (\kappa \cos \theta (1 - r\kappa \cos \theta) - r\tau^2) ds^2 - 2r\tau ds d\theta - r d\theta^2.$$

下面求主方向。注意

$$n_\theta = e_\theta = \frac{1}{r} X_\theta,$$

故 Weingarten 算子满足

$$S(X_\theta) = -n_\theta = -\frac{1}{r} X_\theta.$$

所以 X_θ 是一个主方向, 对应主曲率

$$k_1 = -\frac{1}{r}.$$

再考虑向量

$$Y = X_s - \tau X_\theta.$$

由

$$Y = AT$$

以及

$$n_s = -\kappa \cos \theta T + \tau e_\theta$$

可得

$$n_Y = n_s - \tau n_\theta = -\kappa \cos \theta T = -\frac{\kappa \cos \theta}{A} Y.$$

因而

$$S(Y) = -n_Y = \frac{\kappa \cos \theta}{A} Y.$$

所以另一个主方向为 $Y = X_s - \tau X_\theta$, 其主曲率为

$$k_2 = \frac{\kappa \cos \theta}{1 - r\kappa \cos \theta}.$$

因此高斯曲率与平均曲率分别为

$$K = k_1 k_2 = -\frac{\kappa \cos \theta}{r(1 - r\kappa \cos \theta)},$$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r} + \frac{\kappa \cos \theta}{1 - r\kappa \cos \theta} \right).$$

总结如下:

$$I = (A^2 + r^2 \tau^2) ds^2 + 2r^2 \tau ds d\theta + r^2 d\theta^2,$$

$$II = (\kappa \cos \theta A - r\tau^2) ds^2 - 2r\tau ds d\theta - r d\theta^2,$$

$$\text{主方向: } X_\theta, \quad X_s - \tau X_\theta,$$

$$\text{主曲率: } k_1 = -\frac{1}{r}, \quad k_2 = \frac{\kappa \cos \theta}{A},$$

$$K = -\frac{\kappa \cos \theta}{rA}, \quad H = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r} + \frac{\kappa \cos \theta}{A} \right), \quad A = 1 - r\kappa \cos \theta.$$

□

 注. 关键定理: *Frenet* 公式。管状面计算最重要的是把 N, B 方向的变化改写成 T, e_r, e_θ 。

习题 2.6.4 (Chapter3,18). 求螺面 $P = (u \cos v, u \sin v, u + v)$ 的 Gauss 曲率和平均曲率.



Solution. 先求第一、第二基本形式。

有

$$P_u = (\cos v, \sin v, 1), \quad P_v = (-u \sin v, u \cos v, 1).$$

因而

$$E = \langle P_u, P_u \rangle = 2,$$

$$F = \langle P_u, P_v \rangle = 1,$$

$$G = \langle P_v, P_v \rangle = u^2 + 1.$$

再算法向量:

$$P_u \times P_v = (\sin v - u \cos v, -\cos v - u \sin v, u),$$

所以

$$|P_u \times P_v| = \sqrt{2u^2 + 1}.$$

取单位法向量

$$n = \frac{P_u \times P_v}{\sqrt{2u^2 + 1}}.$$

二阶偏导为

$$P_{uu} = (0, 0, 0), \quad P_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad P_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0).$$

因而

$$L = \langle P_{uu}, n \rangle = 0,$$

$$M = \langle P_{uv}, n \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2u^2 + 1}},$$

$$N = \langle P_{vv}, n \rangle = \frac{u^2}{\sqrt{2u^2 + 1}}.$$

所以高斯曲率

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-\frac{1}{2u^2+1}}{2(u^2+1)-1} = -\frac{1}{(2u^2+1)^2}.$$

平均曲率

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{2 \cdot \frac{u^2}{\sqrt{2u^2+1}} - 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2u^2+1}}\right)}{2(2u^2+1)}.$$

化简得

$$H = \frac{u^2 + 1}{(2u^2 + 1)^{3/2}}.$$

因而

$$\boxed{K = -\frac{1}{(2u^2 + 1)^2}}, \quad \boxed{H = \frac{u^2 + 1}{(2u^2 + 1)^{3/2}}}.$$

□

 注. 关键公式: $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ 与 $H = \frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}$.

2.7 第七次作业 2026.04.15

习题 2.7.1 (Chapter3,19). 设曲面 S 满足 $x^2 + y^2 = f(z)$, 其中 $f(z)$ 三次可微, 且 $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, 证明: S 在点 $(0, 0, 0)$ 处的法曲率函数为常数.



Solution. 设

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - f(z).$$

由条件 $f(0) = 0$ 可知 $(0, 0, 0) \in S$, 又

$$\nabla F(0, 0, 0) = (0, 0, -f'(0)) \neq 0,$$

所以由隐函数定理, 曲面在原点附近可以写成图形

$$z = g(x, y), \quad g(0, 0) = 0.$$

且有恒等式

$$x^2 + y^2 = f(g(x, y)).$$

对 x 求偏导:

$$2x = f'(g)g_x.$$

在原点代入得

$$g_x(0, 0) = 0.$$

同理

$$g_y(0, 0) = 0.$$

再对 x 求一次偏导:

$$2 = f''(g)g_x^2 + f'(g)g_{xx}.$$

在原点处, 由于 $g(0, 0) = 0$ 且 $g_x(0, 0) = 0$, 得

$$2 = f'(0)g_{xx}(0, 0),$$

所以

$$g_{xx}(0, 0) = \frac{2}{f'(0)}.$$

同理

$$g_{yy}(0, 0) = \frac{2}{f'(0)}.$$

再对等式 $2x = f'(g)g_x$ 对 y 求偏导, 得

$$0 = f''(g)g_xg_y + f'(g)g_{xy},$$

在原点处得到

$$g_{xy}(0, 0) = 0.$$

因而原点处图形曲面的第一、第二基本形式分别为

$$I = dx^2 + dy^2$$

和

$$II = \frac{2}{f'(0)}(dx^2 + dy^2)$$

(这里取向上法向量)。

对任意切向量

$$X = \xi \partial_x + \eta \partial_y,$$

其法曲率为

$$k_n(X) = \frac{II(X, X)}{I(X, X)} = \frac{\frac{2}{f'(0)}(\xi^2 + \eta^2)}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{2}{f'(0)}.$$

与方向无关, 因此原点处的法曲率函数是常数。□

 注. 思路: 在特殊点把曲面化成图形, 再看第二基本形式是否是单位矩阵的倍数。若是, 则法曲率与方向无关。

习题 2.7.2 (Chapter3,23). 求曲线 $\rho = \rho(s)$ 的切线面 $P(s, u) = \rho(s) + u \cdot \alpha(s)$ 的曲率线, 比较曲率线的曲率和该曲面的法曲率。

Solution. 这里“切线面”应理解为

$$X(s, u) = \rho(s) + uT(s),$$

其中 s 是母曲线的弧长参数, $T = \rho'(s)$ 是单位切向量。

由 Frenet 公式,

$$X_s = T + u\kappa N, \quad X_u = T.$$

因而当 $u\kappa \neq 0$ 时曲面正则, 且

$$E = \langle X_s, X_s \rangle = 1 + u^2\kappa^2, \quad F = \langle X_s, X_u \rangle = 1, \quad G = \langle X_u, X_u \rangle = 1.$$

再求法向量:

$$X_s \times X_u = (T + u\kappa N) \times T = u\kappa(N \times T) = -u\kappa B.$$

因而可取单位法向量

$$n = B$$

(只差一个整体符号, 不影响曲率线方程)。

继续计算二阶偏导:

$$X_{ss} = \kappa N + u(\kappa'N + \kappa N') = -u\kappa^2T + (\kappa + u\kappa')N + u\kappa\tau B,$$

$$X_{su} = \kappa N, \quad X_{uu} = 0.$$

所以

$$L = \langle X_{ss}, B \rangle = u\kappa\tau, \quad M = \langle X_{su}, B \rangle = 0, \quad N = \langle X_{uu}, B \rangle = 0.$$

曲率线微分方程为

$$(FL - EM)ds^2 + (GL - EN)dsdu + (GM - FN)du^2 = 0.$$

代入上式得

$$u\kappa\tau ds^2 + u\kappa\tau ds du = 0.$$

当 $u\kappa\tau \neq 0$ 时,

$$ds(ds + du) = 0.$$

因而曲率线有两族:

第一族: $ds = 0$, 即 $s = \text{常数}$, 这正是切线面的母线 (直母线)。

第二族: $du = -ds$, 即

$$u + s = C.$$

下面比较曲率与法曲率。

对第一族 $s = \text{常数}$, 曲线为

$$X(u) = \rho(s_0) + uT(s_0),$$

是一条直线, 所以其曲率为 0; 同时第二基本形式在该方向上的值也为 0, 故法曲率也为 0。

对第二族, 取

$$u = C - s.$$

对应曲线可写成

$$\gamma(s) = X(s, C - s) = \rho(s) + (C - s)T(s).$$

于是

$$\gamma'(s) = X_s - X_u = u\kappa N,$$

其速度为

$$|\gamma'(s)| = |u|\kappa.$$

再求导:

$$\gamma''(s) = (-\kappa + u\kappa')N + u\kappa(-\kappa T + \tau B).$$

从而

$$|\gamma' \times \gamma''| = |u|^2 \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}.$$

所以第二族曲率线的曲率为

$$\kappa_\gamma = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{|u|\kappa}.$$

而它沿该方向的法曲率为

$$k_n = \frac{L ds^2 + 2M ds du + N du^2}{E ds^2 + 2F ds du + G du^2}.$$

代入 $du = -ds$ 和 $L = u\kappa\tau, M = N = 0$, 得

$$k_n = \frac{u\kappa\tau}{u^2\kappa^2} = \frac{\tau}{u\kappa}.$$

因此

$$|k_n| = \frac{|\tau|}{|u|\kappa} \leq \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{|u|\kappa} = \kappa_\gamma.$$

也就是说, 第二族曲率线的法曲率是其总曲率在曲面法向上的分量。□

 注. 关键方法: 切线面是直纹面, 先由基本形式求曲率线微分方程, 再分别分析两族曲线。

习题 2.7.3 (Chapter3,24). 求悬链面 $P = (\sqrt{u^2 + a^2} \cos v, \sqrt{u^2 + a^2} \sin v, a \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}))$ 的第一基本形式和第二基本形式, 并求它在点 $(0, 0)$ 沿切向量 $dP = 2P_u + P_v$ 的法曲率.



Solution. 记

$$\rho(u) = \sqrt{u^2 + a^2}.$$

则曲面写成

$$P(u, v) = (\rho \cos v, \rho \sin v, a \ln(u + \rho)).$$

先求偏导。由于

$$\rho' = \frac{u}{\rho}, \quad \frac{d}{du} \ln(u + \rho) = \frac{1}{\rho},$$

所以

$$P_u = \left(\frac{u}{\rho} \cos v, \frac{u}{\rho} \sin v, \frac{a}{\rho} \right),$$

$$P_v = (-\rho \sin v, \rho \cos v, 0).$$

于是

$$E = \langle P_u, P_u \rangle = \frac{u^2 + a^2}{\rho^2} = 1,$$

$$F = \langle P_u, P_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle P_v, P_v \rangle = \rho^2 = u^2 + a^2.$$

因而第一基本形式为

$$I = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2.$$

再算法向量。直接计算

$$P_u \times P_v = (-a \cos v, -a \sin v, u),$$

且

$$|P_u \times P_v| = \sqrt{a^2 + u^2} = \rho.$$

因此可取单位法向量

$$n = \frac{1}{\rho}(-a \cos v, -a \sin v, u).$$

计算二阶偏导:

$$P_{uu} = \left(\frac{a^2}{\rho^3} \cos v, \frac{a^2}{\rho^3} \sin v, -\frac{au}{\rho^3} \right),$$

$$P_{uv} = \left(-\frac{u}{\rho} \sin v, \frac{u}{\rho} \cos v, 0 \right),$$

$$P_{vv} = (-\rho \cos v, -\rho \sin v, 0).$$

所以

$$L = \langle P_{uu}, n \rangle = -\frac{a}{u^2 + a^2},$$

$$M = \langle P_{uv}, n \rangle = 0,$$

$$N = \langle P_{vv}, n \rangle = a.$$

因而第二基本形式为

$$II = -\frac{a}{u^2 + a^2} du^2 + a dv^2.$$

最后求在点 $(0,0)$ 沿切向量

$$dP = 2P_u + P_v$$

的法曲率。法曲率公式为

$$k_n = \frac{L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2}{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}$$

, 其中方向写作 $\lambda P_u + \mu P_v$ 。这里 $(\lambda, \mu) = (2, 1)$ 。

在 $(0,0)$ 处,

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = a^2, \quad L = -\frac{1}{a}, \quad M = 0, \quad N = a.$$

所以

$$k_n(0,0; 2P_u + P_v) = \frac{4(-1/a) + a}{4 + a^2} = \frac{a - \frac{4}{a}}{a^2 + 4} = \frac{a^2 - 4}{a(a^2 + 4)}.$$

□

 注. 关键思路: 先把基本形式算完整, 再把指定方向代进法曲率公式, 不要跳步。

习题 2.7.4 (Chapter3,25). 曲面上任意点处, 任意两正交方向的法曲率之和为常数. 

Solution. 设曲面上一点的主曲率为 k_1, k_2 。若某个单位方向与第一主方向成角 θ , 则由 Euler 公式,

$$k_n(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

与之正交的方向对应角度 $\theta + \frac{\pi}{2}$, 故其法曲率为

$$k_n\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = k_1 \sin^2 \theta + k_2 \cos^2 \theta.$$

两式相加即得

$$k_n(\theta) + k_n\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = k_1 + k_2 = 2H.$$

这里 H 是该点的平均曲率。

因而在曲面任意一点处, 任意两正交方向的法曲率之和都等于同一个常数 $2H$ 。也就是说, 命题中所说的“常数”正是两倍平均曲率。 □

 注. 关键定理: Euler 公式。任意两正交方向的法曲率之和总是 $2H$ 。

习题 2.7.5 (Chapter3,37). 若曲面有参数表示 $P(u, v)$, 其中 u, v 为正交参数, 写出曲面的基本公式. 

Solution. 设

$$E = \langle P_u, P_u \rangle, \quad F = \langle P_u, P_v \rangle = 0, \quad G = \langle P_v, P_v \rangle.$$

因为 u, v 为正交参数, 所以 $F = 0$ 。此时 Christoffel 符号化为

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v}{2E}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{G_u}{2E}, \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{E_v}{2G}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u}{2G}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v}{2G}. \end{aligned}$$

因而 Gauss 公式为

$$\begin{aligned}P_{uu} &= \frac{E_u}{2E}P_u - \frac{E_v}{2G}P_v + Ln, \\P_{uv} &= \frac{E_v}{2E}P_u + \frac{G_u}{2G}P_v + Mn, \\P_{vv} &= -\frac{G_u}{2E}P_u + \frac{G_v}{2G}P_v + Nn.\end{aligned}$$

Weingarten 公式为

$$\begin{aligned}n_u &= -\frac{L}{E}P_u - \frac{M}{G}P_v, \\n_v &= -\frac{M}{E}P_u - \frac{N}{G}P_v.\end{aligned}$$

这就是正交参数下曲面的基本公式。 □

 注. 思路: 正交参数下 $F = 0$, 所以 Gauss 公式、Weingarten 公式和 Christoffel 符号都更整洁。

3. 每周一题

3.1	2026.03.11	55
3.2	2026.03.18	57
3.3	2026.03.25	58
3.4	2026.04.01	59
3.5	2026.04.08	62
3.6	2026.04.15	64
3.7	2026.04.22	66

3.1 2026.03.11

习题 3.1.1. 设正则曲线 $P(s)$ 以 s 为弧长参数, 曲率处处非零。假设存在 s_0 使得从原点到 P 的距离 $|P(s)|$ 在 s_0 处最大, 证明: P 在 s_0 处的曲率满足

$$\kappa(s_0) \geq \frac{1}{|P(s_0)|}.$$



Solution. 设

$$\phi(s) = |P(s)|^2.$$

因为 ϕ 在 s_0 处取极大值, 所以

$$\phi'(s_0) = 0, \quad \phi''(s_0) \leq 0.$$

由 s 是弧长参数, $P'(s) = T(s)$, 故

$$\phi'(s) = 2\langle P(s), T(s) \rangle.$$

于是

$$\langle P(s_0), T(s_0) \rangle = 0.$$

再求导：

$$\phi''(s) = 2(\langle T, T \rangle + \langle P, T' \rangle) = 2(1 + \kappa \langle P, N \rangle).$$

在 s_0 处有

$$1 + \kappa(s_0) \langle P(s_0), N(s_0) \rangle \leq 0.$$

因而

$$\langle P(s_0), N(s_0) \rangle \leq -\frac{1}{\kappa(s_0)}.$$

由于 $P(s_0) \perp T(s_0)$ ，故 $P(s_0)$ 落在由 $N(s_0), B(s_0)$ 张成的平面内，可写成

$$P(s_0) = aN(s_0) + bB(s_0).$$

于是

$$a = \langle P(s_0), N(s_0) \rangle, \quad |a| \leq |P(s_0)|.$$

上面不等式给出

$$-a \geq \frac{1}{\kappa(s_0)}.$$

从而

$$\frac{1}{\kappa(s_0)} \leq |a| \leq |P(s_0)|.$$

即

$$\kappa(s_0) \geq \frac{1}{|P(s_0)|}.$$

证毕。 □

 注. 关键方法：极值问题常转成对标量函数求一、二阶导数。这里用的是 $\phi(s) = |P(s)|^2$ 。

3.2 2026.03.18

习题 3.2.1. 设曲线 $P(s)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中以弧长 s 为参数的正则曲线, 曲率 $\kappa(s) > 0$, 挠率 $\tau(s) \neq 0$ 。若 P 的所有次切平面都经过同一个固定点 O , 证明: 存在常数 c_1, c_2 使得

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_1 s + c_2.$$



Solution. 不妨把坐标原点取在固定点 O 。注意次切平面是由 $T(s), B(s)$ 张成的平面, 其法向量为 $N(s)$ 。因此条件“所有次切平面都经过 O ”等价于向量 $O - P(s) = -P(s)$ 落在 $\text{span}\{T(s), B(s)\}$ 中, 也就是

$$\langle P(s), N(s) \rangle = 0.$$

对 s 求导, 得

$$0 = \langle T, N \rangle + \langle P, N' \rangle = \langle P, -\kappa T + \tau B \rangle.$$

这说明 $P(s)$ 总在由 $T(s), B(s)$ 张成的平面内, 因此可写成

$$P(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s).$$

对它求导:

$$T = \lambda'T + \lambda T' + \mu'B + \mu B' = \lambda'T + (\lambda\kappa - \mu\tau)N + \mu'B.$$

比较 T, N, B 三个方向的系数, 得到

$$\lambda'(s) = 1, \quad \mu'(s) = 0, \quad \lambda(s)\kappa(s) - \mu(s)\tau(s) = 0.$$

因而

$$\lambda(s) = s + c_2, \quad \mu(s) = c$$

其中 $c \neq 0$ (若 $c = 0$, 则由 $\lambda\kappa - \mu\tau = 0$ 会推出 $\lambda\kappa = 0$, 与 $\kappa > 0$ 矛盾)。

再由

$$\lambda\kappa = \mu\tau$$

得

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{\lambda(s)}{\mu} = \frac{1}{c}s + \frac{c_2}{c}.$$

令

$$c_1 = \frac{1}{c}, \quad c'_2 = \frac{c_2}{c},$$

便得到

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_1 s + c'_2.$$

□



注. 思路: 次切平面是 $\text{span}\{T, B\}$, 其法向量是 N 。固定点在每个次切平面内, 会强迫位置向量满足 $\langle P, N \rangle = 0$, 从而分解成 T, B 的线性组合并得到微分方程。

3.3 2026.03.25

习题 3.3.1. 设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 是一光滑正则曲面, $P \in S$. 若存在一个球面 Σ (球心为 O , 半径为 $R > 0$) 使得 $\Sigma \cap S = \{P\}$, 证明: 球面 Σ 与曲面 S 在点 P 处相切, 即它们在 P 处的切平面重合。



Solution. 设

$$\Phi(X) = |X - O|^2.$$

球面 Σ 的方程就是

$$\Phi(X) = R^2.$$

已知 $\Sigma \cap S = \{P\}$. 由于 S 在 P 附近是连通的局部参数曲面, 函数

$$\Phi|_S - R^2$$

在 P 的某个邻域内不能变号; 否则由连续性, 沿着曲面内连接两点的路径必然还会出现别的零点, 这与 $\Sigma \cap S = \{P\}$ 矛盾。

因而 P 是 $\Phi|_S$ 的局部极值点, 于是对任意切向量 $V \in T_P S$, 都有

$$d(\Phi|_S)_P(V) = 0.$$

另一方面,

$$d\Phi_P(V) = 2\langle P - O, V \rangle.$$

因此

$$\langle P - O, V \rangle = 0, \quad \forall V \in T_P S.$$

这说明向量 $P - O$ 垂直于曲面 S 在点 P 处的切平面。

但是对于球面 Σ 来说, $P - O$ 也正是球面在点 P 的法向量, 因此它同样垂直于球面 Σ 在点 P 的切平面。

一个平面由其法向量唯一确定, 所以二者的切平面相同。也就是说, 球面 Σ 与曲面 S 在点 P 处相切。□



注. 关键思路: 把球面看成距离函数的等值面, 在曲面上只有一个交点意味着该距离函数在该点取极值。

3.4 2026.04.01

习题 3.4.1. 设 $C: P(s), s \in [0, L]$ 是一条逆时针转动的平面凸闭曲线, s 是弧长参数, 其正交标架场为 $\{P(s); \alpha(s), \beta(s)\}$, 称曲线

$$\tilde{C}: \tilde{P}(s) = P(s) - d\beta(s), \quad s \in [0, L]$$

为 C 的平行曲线, 其中 d 是正常数。证明:

1. $\tilde{L} = L + 2\pi d$;
2. $\tilde{A} = A + dL + \pi d^2$;
3. $\tilde{\kappa}_r = \frac{\kappa_r}{1 + d\kappa_r}$ 。

其中 L, A, κ_r ($\tilde{L}, \tilde{A}, \tilde{\kappa}_r$) 分别是 C ($\tilde{C}$) 的长度、面积和曲率。



Solution. 设 $\alpha(s)$ 是单位切向量, $\beta(s)$ 是与之组成正向正交标架的法向量。则 Frenet 公式写成

$$\alpha'(s) = \kappa_r(s)\beta(s), \quad \beta'(s) = -\kappa_r(s)\alpha(s).$$

由

$$\tilde{P}(s) = P(s) - d\beta(s)$$

求得

$$\tilde{P}'(s) = \alpha(s) - d\beta'(s) = (1 + d\kappa_r(s))\alpha(s).$$

因为原曲线是逆时针凸闭曲线, 所以 $\kappa_r(s) > 0$, 从而

$$|\tilde{P}'(s)| = 1 + d\kappa_r(s).$$

因此

$$d\tilde{s} = (1 + d\kappa_r) ds.$$

所以平行曲线的长度为

$$\tilde{L} = \int_0^L d\tilde{s} = \int_0^L (1 + d\kappa_r) ds = L + d \int_0^L \kappa_r ds.$$

对于逆时针凸闭曲线,

$$\int_0^L \kappa_r ds = 2\pi,$$

故

$$\tilde{L} = L + 2\pi d.$$

下面求面积。设平面点向量写作 $Q = (x, y)$ 。Green 公式给出正向简单闭曲线围成面积

$$A(Q) = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int \det(Q, Q') dt.$$

因此对原曲线, 因为 $P'(s) = \alpha(s)$, 有

$$A = \frac{1}{2} \int_0^L \det(P, \alpha) ds.$$

对平行曲线, 虽然这里仍用原来的参数 s 来描写边界, 但面积公式只需要曲线及其对该参数的导数, 所以

$$\tilde{A} = \frac{1}{2} \int_0^L \det(\tilde{P}, \tilde{P}') ds.$$

于是

$$\tilde{A} = \frac{1}{2} \int_0^L \det(P - d\beta, (1 + d\kappa_r)\alpha) ds.$$

展开得

$$\tilde{A} = A + \frac{d}{2} \int_0^L \kappa_r \det(P, \alpha) ds - \frac{d}{2} \int_0^L \det(\beta, \alpha) ds - \frac{d^2}{2} \int_0^L \kappa_r \det(\beta, \alpha) ds.$$

因为 $\det(\alpha, \beta) = 1$, 所以 $\det(\beta, \alpha) = -1$ 。又由

$$\frac{d}{ds} \det(P, \beta) = \det(\alpha, \beta) + \det(P, \beta') = 1 - \kappa_r \det(P, \alpha),$$

对闭曲线积分可得

$$\int_0^L \kappa_r \det(P, \alpha) ds = L.$$

因而

$$\tilde{A} = A + \frac{d}{2}L + \frac{d}{2}L + \frac{d^2}{2} \int_0^L \kappa_r ds = A + dL + \pi d^2.$$

最后求相对曲率。由于

$$\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{P}'}{|\tilde{P}'|} = \alpha,$$

所以

$$\tilde{\kappa}_r = \left\langle \frac{d\tilde{\alpha}}{d\tilde{s}}, \beta \right\rangle = \frac{1}{d\tilde{s}/ds} \left\langle \frac{d\alpha}{ds}, \beta \right\rangle = \frac{\kappa_r}{1 + d\kappa_r}.$$

综上,

$$\boxed{\tilde{L} = L + 2\pi d}, \quad \boxed{\tilde{A} = A + dL + \pi d^2}, \quad \boxed{\tilde{\kappa}_r = \frac{\kappa_r}{1 + d\kappa_r}}.$$

□

 注. 关键公式: $\tilde{P}' = (1 + d\kappa_r)\alpha$ 。长度、面积、相对曲率三条结论都从这一步出发。

习题 3.4.2. 设 $C: P(s), s \in [a, b]$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一条正则简单闭曲线, s 为弧长参数, 曲率为 $\kappa(s)$ 。它的单位切向量 $T(s)$ 构成了单位球面上的一条曲线

$$\tilde{C}: \tilde{P}(s) = T(s), s \in [a, b],$$

我们称其为 C 的切线标线 (*tangent indicatrix*)。记 $\tilde{C}$ 的长度为 L 。证明:

1. $\tilde{C}$ 的长度等于 C 的总曲率, 即

$$L = \int_a^b \kappa(s) ds,$$

2. 若 $L < 2\pi$, 则存在一个开半球, 这个开半球包含 $\tilde{C}$ 。(Hint: 单位球面上任何一条长度小于 π 的曲线都一定包含于某个开半球。)

3. C 的总曲率满足不等式

$$\int_a^b \kappa(s) ds \geq 2\pi.$$



Solution. 记切线标线为

$$\tilde{P}(s) = T(s) \in S^2.$$

对于 (1), 由 Frenet 公式

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

得

$$|\tilde{P}'(s)| = |T'(s)| = \kappa(s).$$

因此切线标线的长度为

$$L = \int_a^b |\tilde{P}'(s)| ds = \int_a^b \kappa(s) ds.$$

这就证明了切线标线的长度等于原曲线的总曲率。

对于 (2), 这是单位球面上的一个标准结论: 长度小于 2π 的闭球面曲线必包含于某个开半球内; 提示中给出的“长度小于 π 的球面曲线包含于某个开半球”正是证明该结论的基本引理。于是当

$$L < 2\pi$$

时, $\tilde{C}$ 包含在某个开半球内, 即存在单位向量 q , 使得对一切 $s \in [a, b]$ 都有

$$\langle T(s), q \rangle > 0.$$

对于 (3), 若反设

$$\int_a^b \kappa(s) ds < 2\pi,$$

那么由 (1)(2) 可知切线标线 $\tilde{C}$ 包含在某个开半球内, 因此存在单位向量 q 使得

$$\langle T(s), q \rangle > 0, \quad \forall s \in [a, b].$$

令

$$\phi(s) = \langle P(s), q \rangle.$$

则

$$\phi'(s) = \langle T(s), q \rangle > 0.$$

这说明 ϕ 在整个区间上严格递增。但曲线 C 是闭曲线, 所以

$$P(a) = P(b),$$

于是

$$\phi(a) = \phi(b),$$

与严格递增矛盾。

所以反设不成立, 从而

$$\int_a^b \kappa(s) ds \geq 2\pi.$$

这就是 Fenchel 不等式。

□



注. 关键定理: 切线标线长度等于总曲率, 加上 Fenchel 不等式的球面解释。

3.5 2026.04.08

习题 3.5.1. 设 $\alpha(s)$ 是一条正则曲线, s 为弧长参数, $\kappa(s)$ 和 $\tau(s)$ 分别是 α 的曲率和挠率。曲线上每点处的 Frenet 标架为 $\{\alpha(s); T(s), N(s), B(s)\}$ 。定义曲面

$$P(s, \theta) = \alpha(s) + r \cos \theta N(s) + r \sin \theta B(s),$$

其中 $r \in (0, \min_s \frac{1}{\kappa(s)})$ 为常数, 已知当 r 充分小时, P 是一个正则曲面。试计算 P 的第一基本形式和第二基本形式。



Solution. 这是一般曲线的管状面, 计算与第六次作业第三题完全相同, 而且并不需要 κ, τ 为常数。

记

$$e_r = \cos \theta N + \sin \theta B, \quad e_\theta = -\sin \theta N + \cos \theta B, \quad A = 1 - r\kappa(s) \cos \theta.$$

则

$$P(s, \theta) = \alpha(s) + r e_r.$$

由 Frenet 公式得

$$(e_r)_s = -\kappa \cos \theta T + \tau e_\theta, \quad (e_\theta)_s = \kappa \sin \theta T - \tau e_r.$$

因而

$$P_s = T + r(e_r)_s = AT + r\tau e_\theta,$$

$$P_\theta = r e_\theta.$$

所以第一基本形式系数为

$$E = \langle P_s, P_s \rangle = A^2 + r^2 \tau^2,$$

$$F = \langle P_s, P_\theta \rangle = r^2 \tau,$$

$$G = \langle P_\theta, P_\theta \rangle = r^2.$$

即

$$I = (A^2 + r^2 \tau^2) ds^2 + 2r^2 \tau ds d\theta + r^2 d\theta^2.$$

取单位法向量

$$n = e_r.$$

再求二阶偏导:

$$P_{s\theta} = r\kappa \sin \theta T - r\tau e_r,$$

$$P_{\theta\theta} = -r e_r.$$

同时

$$\langle P_{ss}, n \rangle = \kappa \cos \theta (1 - r\kappa \cos \theta) - r\tau^2.$$

因而第二基本形式系数为

$$L = \kappa \cos \theta (1 - r\kappa \cos \theta) - r\tau^2,$$

$$M = -r\tau,$$

$$N = -r.$$

所以

$$II = (\kappa \cos \theta (1 - r \kappa \cos \theta) - r \tau^2) ds^2 - 2r\tau ds d\theta - r d\theta^2.$$

□

 注. 思路: 一般管状面和常曲率常挠率情形的区别只在 κ, τ 现在依赖于 s , 计算骨架不变。

3.6 2026.04.15

习题 3.6.1. 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中无脐点的正则曲面。若在某个参数表示 (u, v) 下, 其第一、第二基本形式的系数满足:

1. $E = 1, F = 0, G = au^2$, 其中 $a > 0$ 为常数;
2. $L = \alpha u, M = \beta u, N = \gamma u$, 其中 α, β, γ 为常数且不同时为零。

则 S 是圆锥面的一部分。



Solution. 记

$$I = du^2 + au^2 dv^2.$$

因而

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = au^2.$$

第二基本形式系数为

$$L = \alpha u, \quad M = \beta u, \quad N = \gamma u.$$

下面利用 Gauss–Codazzi 方程。

先由第一基本形式算 Christoffel 符号。因为 $E = 1, F = 0, G = au^2$, 故唯一非零的 Christoffel 符号是

$$\Gamma_{22}^1 = -au, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{u}.$$

由 Codazzi 方程

$$h_{11;2} = h_{12;1}, \quad h_{12;2} = h_{22;1}$$

来看。这里

$$h_{11} = L = \alpha u, \quad h_{12} = M = \beta u, \quad h_{22} = N = \gamma u.$$

第一条 Codazzi 方程给出

$$h_{11;2} = \partial_v(\alpha u) - 2\Gamma_{12}^2 h_{12} = -2\beta,$$

$$h_{12;1} = \partial_u(\beta u) - \Gamma_{21}^2 h_{12} = \beta - \beta = 0.$$

故

$$\beta = 0.$$

第二条 Codazzi 方程给出

$$h_{12;2} = \partial_v(\beta u) - \Gamma_{22}^1 h_{11} - \Gamma_{12}^2 h_{22} = a\alpha u^2 - \gamma,$$

$$h_{22;1} = \partial_u(\gamma u) - 2\Gamma_{21}^2 h_{22} = \gamma - 2\gamma = -\gamma.$$

因而

$$a\alpha u^2 - \gamma = -\gamma,$$

从而

$$\alpha = 0.$$

所以

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = \gamma u.$$

这时 Gauss 公式化为

$$P_{uu} = 0, \quad P_{uv} = \frac{1}{u}P_v, \quad P_{vv} = -auP_u + \gamma un.$$

由 $P_{uu} = 0$ 可知

$$P(u, v) = uA(v) + B(v),$$

其中 $A(v), B(v)$ 只依赖于 v 。

于是

$$P_u = A(v), \quad P_v = uA'(v) + B'(v).$$

再利用第一基本形式条件：

由 $E = 1$ 得

$$|A(v)|^2 = 1.$$

由 $F = 0$ 得

$$0 = \langle P_u, P_v \rangle = u\langle A, A' \rangle + \langle A, B' \rangle.$$

又因为 $|A|^2 = 1$, 故

$$\langle A, A' \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dv} |A|^2 = 0,$$

从而

$$\langle A, B' \rangle = 0.$$

最后由 $G = au^2$ 得

$$au^2 = |P_v|^2 = |uA' + B'|^2 = u^2|A'|^2 + 2u\langle A', B' \rangle + |B'|^2.$$

比较关于 u 的各次项系数, 得到

$$|B'(v)|^2 = 0, \quad \langle A'(v), B'(v) \rangle = 0, \quad |A'(v)|^2 = a.$$

因而

$$B'(v) = 0.$$

所以 $B(v)$ 是常向量。经过一次平移后, 可设 $B(v) \equiv 0$, 从而

$$P(u, v) = uA(v), \quad |A(v)| = 1, \quad |A'(v)|^2 = a.$$

这说明曲面上每一点都位于经过固定点 0 的射线上, 故 S 正是以原点为顶点、球面曲线 $A(v) \subset S^2$ 为准线的圆锥面的一部分。□

 注. 关键定理: Gauss-Codazzi 方程与 Gauss 公式。先用相容条件压缩系数, 再积分出圆锥参数式。

3.7 2026.04.22

习题 3.7.1. 设 $S: P(u, v), (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ 是正则曲面的一部分, 其面积为 $A(S)$. E, F, G, L, M, N 分别是 S 在这组参数下的第一、第二基本量, n 是单位法向量场. $f(u, v)$ 是 $[a, b] \times [c, d]$ 上的一个扰动函数, 定义扰动后的曲面

$$S_f: P(u, v) + f(u, v)n(u, v),$$

取 f 足够小使得 S_f 是一个正则曲面。

1. 对任意较小的 t , 定义

$$S_{tf}: P(u, v) + tf(u, v)n(u, v),$$

证明

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(S_{tf}) = -2 \int_c^d \int_a^b f H \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

其中 H 是 S 的平均曲率。

2. 若对任意的小扰动 f 都有 $A(S_f) \geq A(S)$, 证明 S 的平均曲率处处为零, 即 S 是极小曲面。



Solution. 令

$$X_t(u, v) = P(u, v) + t f(u, v)n(u, v),$$

则 $X_0 = P$, 并且 $A(S_{tf})$ 就是参数曲面 X_t 的面积。

先求变形后第一基本形式系数在 $t = 0$ 处的一阶变化。由

$$(X_t)_u = P_u + t(f_u n + f n_u), \quad (X_t)_v = P_v + t(f_v n + f n_v),$$

并利用

$$\langle P_u, n \rangle = \langle P_v, n \rangle = 0$$

以及 Weingarten 公式, 可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{dE_t}{dt} \right|_{t=0} &= 2\langle P_u, f n_u \rangle = -2fL, \\ \left. \frac{dF_t}{dt} \right|_{t=0} &= \langle P_u, f n_v \rangle + \langle f n_u, P_v \rangle = -2fM, \\ \left. \frac{dG_t}{dt} \right|_{t=0} &= 2\langle P_v, f n_v \rangle = -2fN. \end{aligned}$$

记

$$\Delta_t = E_t G_t - F_t^2.$$

则

$$\left. \frac{d\Delta_t}{dt} \right|_{t=0} = G \left. \frac{dE_t}{dt} \right|_{t=0} + E \left. \frac{dG_t}{dt} \right|_{t=0} - 2F \left. \frac{dF_t}{dt} \right|_{t=0}.$$

代入上式,

$$\left. \frac{d\Delta_t}{dt} \right|_{t=0} = -2f(GL + EN - 2FM).$$

因此面积元的一阶变化为

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sqrt{\Delta_t} = \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}} \left. \frac{d\Delta_t}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{f(GL+EN-2FM)}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

又平均曲率满足

$$H = \frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)},$$

所以

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sqrt{\Delta_t} = -2fH\sqrt{EG-F^2}.$$

对参数区域积分, 得到

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(S_{tf}) = -2 \int_c^d \int_a^b fH\sqrt{EG-F^2} du dv.$$

这就证明了第一问。

下面证明第二问。若对任意足够小的扰动 f 都有

$$A(S_f) \geq A(S),$$

则对任意 f , 函数 $t \mapsto A(S_{tf})$ 在 $t=0$ 处取极小值, 从而

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(S_{tf}) = 0.$$

所以

$$\int_c^d \int_a^b fH\sqrt{EG-F^2} du dv = 0$$

对一切足够小的光滑函数 f 都成立。

由于

$$\sqrt{EG-F^2} > 0$$

处处成立, 根据变分法中的基本引理, 只能有

$$H(u, v) \equiv 0.$$

因此曲面 S 的平均曲率处处为零, 所以 S 是极小曲面。 □

 注. 关键方法: 把面积元对参数 t 做一阶求导, 并把出现的组合识别成平均曲率 H 。

