

K_4 的 Ramsey–Turán 问题

杨锟 2313878

2026 年 6 月 14 日

报告之前

我按照论文的顺序从头到尾地把每个断言、引理和定理都好好地看了一遍，并按照文章的思路先重新写了一遍证明（报告里面的引理、断言、定理的顺序的编号我都按照原本的论文来写）。跟着文章的思路走的时候，我发现了论文在证明的时候跳步的地方还挺多的，而且有些都是我想了好一阵子才想出怎么补全这个证明的。此外，看的过程中我也有一些想法，有一些疑问，感觉想写的东西还挺多的，所以我用不同颜色来区分这个报告中到底是作者写的还是我的想法：

刚开始写的时候我是按照论文的证明顺序来写的，然后一开始还没发要求我就把原文的证明复现了一半，并补全了一些感觉不显然但没给出来的证明。后面老师说的要求是不要全部都写原文的证明，我想着我都写了一大半不如全部给他写完。当然我也按照具体的要求提出了我的一些质疑。如果觉得证明部分过于繁琐的话可以直接看 **非黑色字体部分**，这些主要是我的一些质疑理解与对文章命题的一些加强。

普通的黑字是论文中作者写到的部分。

 这是我在看论文的过程中忽然冒出来的想法。

 这是我对论文中不全或者作者说留给读者去想的证明进行的补充证明。

 这是我对论文内容的质疑和对论文中的证明细节、命题的思考与改进，给出了几个命题放在了第四小节。

1 综述

1.1 本文的研究方向和结果综述

Ramsey–Turán 问题最早由 Sós 提出，在 Turán 问题中我们研究的是在禁止某个子图出现的情况下能得到的图的最大边数，而在 Ramsey–Turán 问题研究的是此基础上加上了独立数的限制条件下能得到的图的最大边数 [9, 8]。

对给定图 H 和正整数 m ，我们定义 Ramsey–Turán 数为

$$RT(n, H, m) := \max\{e(G) : |V(G)| = n, \alpha(G) < m, H \not\subseteq G\}.$$

这里 $e(G)$ 表示图 G 的边数， $\alpha(G)$ 表示其独立数。

 我们记 $\alpha = \frac{\alpha(G)}{n}$ ，其中 $\alpha(G)$ 代表 G 的独立数， n 代表 G 的顶点数。

当然，这篇论文研究的是 $H = K_4$ 的特殊情形，即在 K_4 -free 且独立数存在限制的条件下，这样的图的边数最多能达到多大。

 回顾课上讲的，也就是在没有独立数的限制情况下，那么 K_4 -free 图的极值问题由 Turán 定理可以解决：

Theorem (Turán Theorem). 如果 G 是 n 个顶点的 K_{r+1} -free 图，则 $e(G) \leq e(T_{n,r})$.

即我们有 $ex(K_4, n) = \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$.

但如果我们将独立数赋予特殊限制，图的整体结构也会受到额外限制，此时最优边数会显著下降。对 K_4 而言，Szemerédi 在 1972 年给出了如下结果 [10]：

Theorem 1.1. 对任意 $\eta > 0$ ，存在 $\alpha_0 > 0$ ，使得当 n 充分大时，任意 n 阶图 G 若满足

$$e(G) \geq \left(\frac{1}{8} + \eta\right) n^2,$$

则 G 要么含有一个 K_4 ，要么包含一个大小大于 $\alpha_0 n$ 的独立集。

Bollobás 和 Erdős 构造出了 K_4 -free 图族，满足

$$e(G) = \frac{n^2}{8} - o(n^2), \quad \alpha(G) = o(n),$$

从而说明 $1/8$ 正是该问题的在 **主项** 上的正确极限密度 [2]。因此，后续研究的重点不再是主项本身，而是当独立数 $\alpha(G)$ 仍为线性量级、且 α 很小时，边数上界在 $n^2/8$ 之外还能精确增加多少。

更进一步，Fox、Loh 和 Zhao 在 [4] 中给出了如下更为精细的结果：

Theorem. [4, Theorem 1.6] 存在绝对常数 $\gamma > 0$ ，使得若图 G 满足 $\alpha(G) = \alpha n$ 、 $\alpha \leq \gamma$ ，且

$$e(G) \geq \frac{n^2}{8} + \frac{3}{2} \alpha n^2,$$

则 G 必含 K_4 。

与此同时，他们还给出了非常强的下界构造。令

$$\beta = \sqrt{\frac{(\log \log n)^3}{\log n}},$$

则当 $\alpha/\beta \rightarrow \infty$ 时，可以构造出 K_4 -free 图，使其独立数约为 αn ，而边数已经明显超过 $n^2/8$ ；更强地，当 $\alpha^2/\beta \rightarrow \infty$ 时，他们得到的下界可以写成

$$\frac{n^2}{8} + \left(\frac{\alpha - \alpha^2}{2} - o(\alpha^2)\right) n^2.$$

因此，在 α 相对 β 足够大时，他们实际上确定了 η 的大致范围：

$$\frac{\alpha - \alpha^2}{2} - o(\alpha^2) \leq \eta \leq \frac{3}{2} \alpha,$$

其中 η 表示边数 $e(G) = \frac{n^2}{8} + \eta n^2$ 。但值得注意的是， η 上界证明是依赖于 Szemerédi 正则引理 [11]。

之后，Lüders 和 Reiher 在一般情形下得到了如下更一般的结果 [7]：

Theorem 1.2. 存在阈值 $0 < \gamma^* \ll 1$, 使得当 $0 < \gamma \leq \gamma^*$ 、 n 充分大且图 G 满足

$$e(G) > \frac{n^2 + n}{8} + \frac{\gamma - \gamma^2}{2} n^2, \quad \alpha(G) \leq \gamma n,$$

则 G 必含 K_4 。



但是, 由于该证明仍然建立在 Szemerédi 正则引理 [11] 之上, 可用常数 γ^* 极小。回到我们所看的这篇论文, 这篇论文说到底就是在讲一个如下的核心主定理 [3]:

Theorem 1.3. 取 $\nu = 1/500$, 并设

$$\gamma = \exp\left(-\frac{10 \log(1/\nu)}{\nu}\right), \quad N = \exp\left(\frac{10 \log(1/\nu)}{\nu}\right).$$

若 $n \geq N$, 图 G 满足

$$\alpha = \frac{\alpha(G)}{n} \leq \gamma$$

且

$$e(G) > \frac{n^2 + n}{8} + \frac{\alpha - \alpha^2}{2} n^2,$$

其中 $\alpha = \alpha(G)/n$, 则 G 必含 K_4 。

 显然有 $\gamma < \frac{1}{2}$ 。



第一, 它在 α 足够小的范围内, 把上界推进到了与 Fox-Loh-Zhao 下界主导项一致的水平, 从而说明二阶项

$$\frac{\alpha - \alpha^2}{2} n^2$$

不仅对固定常数 α 正确, 而且在更广的“小 α ”区间里仍然给出本质最优的阈值。第二, 本文完全避免使用 Szemerédi 正则引理 [11], 而是使用了另一种偏向直接构造计数的方法, 这样使得上界推广到了更宽的参数区间, 而不是像前面 theorem 1.2 里面要求的 $\gamma^* \ll 1$ 。

 我感觉这篇文章的创新性就在于他跳脱出使用 Szemerédi 正则引理 [11] 的范畴, 而是直接用构造计数来给出更好的区间, 而且纵观整篇文章的证明, 感觉比较难想的就是证明最开始的那一部分构造, 其他也都是目的性极强的代数运算, 算就完了。

 一开始看到 theorem 1.3 的取 $\nu = 1/500$, 我就在想为什么是取 $\nu = 1/500$, 有没有什么特殊含义? 从后续的证明来看, 这里的 $\nu = 1/500$ 主要是起到控制误差项的作用, 比如说控制 $7\nu n, 15\nu n, 15\nu n, 41\nu n$ 然后最重要的是保证 $\alpha \ll \nu^2 n, \nu^3 n$ 。

我也对 ν 的取值范围进行了进一步的探讨, 最终发现如果按照论文中的不等式放缩关系, 我们只需取 $\nu < 1/321$ 即可, 具体的计算过程见 proposition 4.1。

1.2 近期相关结果

 我也查找了近期关于 $RT(n, K_4, m)$ 的相关论文, 没有看到在结论上继续推进 theorem 1.3 的后续论文。不过, 对于更一般的 Ramsey-Turán 理论, 近两年还是有几篇和这篇论文联系紧密, 值得提一下。

Balogh、Chen、McCourt 和 Murley 在 2024 年的工作 [1] 讨论了 $RT(n, K_s, f(n))$ 在小独立数条件下的行为, 他们主要研究的是 $s \leq 13$ 的 clique 情形。该文表明: 当我们把独立数进一步压小,

Ramsey–Turán 问题的极值结构会发生新的分段变化。

Gao, Jiang, Liu 和 Sankar 在 2025 年的论文 [5] 研究了广义 Ramsey–Turán 函数 $RT(n, K_s, K_t, o(n))$ 。这里研究的对象已经不是边数，而是图中 K_s 出现的总次数。论文对所有 $s \geq 3$ 的 *clique* 情形给出了组合性的渐近刻画，虽然这个问题和本文并不完全在同一层面上，但它在方法上与本文有相通之处，都更强调直接把极值结构刻画出来，而不只是借助 Szemerédi 正则引理 [11] 得到一个较粗的存在性结论。

Liu, Reiher, Sharifzadeh 和 Staden 在 2026 年的文章 [6] 则把重点放在更一般的 Ramsey–Turán 构造问题上。他们构造出了具有任意有理密度的 Bollobás–Erdős 型图，并否定了这一方向中一个关于周期性的长期猜想，同时还给出了一些匹配的上界。我觉得，他们给出了一个很好的观点：针对于本文研究的问题，这个方向的发展并不只是不断打磨上界，也在产生新的构造方法和找到新的反例。从这个角度看，本文的工作更像是对经典 K_4 分支中结构上界方法的一次推进，而 [6] 则展示了构造方法在更一般框架下的展开。

2 定义与主要工具

2.1 关于图 G 的最小度

我们从原图 G 中取一个最小子集 $V_1 \subseteq V$ ，令 $G_1 = G[V_1]$ ，并记 $n_1 = |V_1|$ 、 $\alpha_1 = \alpha(G_1)/n_1$ ，其中 V_1 满足：

$$e(G_1) > \frac{|V_1|^2 + |V_1|}{8} + \frac{\alpha - \alpha^2}{2} n^2,$$

 我觉得这一步是整篇论文最关键的地方。

主定理中的条件是：

$$e(G) > \frac{n^2 + n}{8} + \frac{\alpha - \alpha^2}{2} n^2,$$

然后在这里，我们之所以先这样取一个极小的诱导子图 G_1 ，主要是为了同时保留“边数仍然足够多”和“结构更容易控制”这两个特点。这样的话，我们一旦删去任意一个顶点就会破坏边数条件，于是在此基础上可以反推出 G_1 具有较好的最小度下界，而且这样删能够方便后续的计数。换句话说，这一步的作用就是把原问题约化到一个更适合后续构造和计数的情形。

Claim 2.1. 子图 G_1 的顶点数严格大于

$$\sqrt{\alpha(G)n/2},$$

从而在 $n \geq N$ 时也有

$$|V(G_1)| > \sqrt{\alpha(G)n/2}.$$



Proof. 由 V_1 的选取方式可知

$$e(G_1) > \frac{\alpha - \alpha^2}{2} n^2.$$

又因为 $\alpha \leq \gamma < 1/2$ ，于是

$$\frac{\alpha - \alpha^2}{2} n^2 = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2} n^2 > \frac{\alpha n^2}{4} = \frac{\alpha(G)n}{4}.$$

另一方面， G_1 是简单图，故 $|V(G_1)| > \sqrt{\alpha(G)n/2}$ 。

 (这里原文的细节没有写完整，我自己补充一下)

我们记 $t = |V(G_1)|$ ，由于 G_1 是简单图，故

$$e(G_1) \leq \binom{t}{2} < \frac{t^2}{2}.$$

假设

$$t \leq \sqrt{\alpha(G)n/2},$$

那么就有

$$e(G_1) < \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha(G)n}{2} = \frac{\alpha(G)n}{4},$$

这与上面的下界矛盾。因此必有

$$|V(G_1)| > \sqrt{\alpha(G)n/2}.$$

再结合 $n \geq N$ ，立即得到

$$|V(G_1)| > \sqrt{\alpha(G)N/2}.$$

□

 *claim 2.1* 中的下界，是把 $1 - \alpha$ 直接粗略估成了 $1/2$ 。虽然这一步对后面的证明没有影响，但如果我们保留原式中的 $\alpha(1 - \alpha)$ ，可以直接得到更强的

$$|V(G_1)| > \sqrt{\alpha(G)(n - \alpha(G))}.$$

Claim 2.2. 图 G_1 的最小度至少为 $n_1/4$ 。此外，

$$e(G_1) > \frac{n_1^2 + n_1}{8} + \frac{\alpha_1 - \alpha_1^2}{2} n_1^2.$$



Proof. 由 V_1 的最小性可知，对任意 $v \in V_1$ ，删去 v 之后得到的图都不再满足定义 V_1 时所要求的边数条件，因此

$$e(G_1[V_1 - v]) \leq \frac{(n_1 - 1)^2 + n_1 - 1}{8} + \frac{\alpha - \alpha^2}{2} n^2.$$

另一方面，

$$\deg_{G_1}(v) = e(G_1) - e(G_1[V_1 - v]).$$

于是

$$\deg_{G_1}(v) \geq \left(\frac{n_1^2 + n_1}{8} + \frac{\alpha - \alpha^2}{2} n^2 \right) - \left(\frac{(n_1 - 1)^2 + n_1 - 1}{8} + \frac{\alpha - \alpha^2}{2} n^2 \right) = \frac{n_1}{4}.$$

由 v 的任意性，所以 G_1 的最小度至少为 $n_1/4$ 。

下面证明第二个不等式，我们只需证明

$$\alpha(G)n - \alpha(G)^2 \geq \alpha(G_1)n - \alpha(G_1)^2,$$

 (这里原文的细节没有写完整，我自己补充一下)

这里之所以“只需证明”这一点，是因为我们最终想要推出的是

$$e(G_1) > \frac{n_1^2 + n_1}{8} + \frac{\alpha_1 - \alpha_1^2}{2} n_1^2,$$

其中 $\alpha_1 = \alpha(G_1)/n_1$ 。而由 G_1 的定义已经知道

$$e(G_1) > \frac{n_1^2 + n_1}{8} + \frac{\alpha - \alpha^2}{2} n^2$$

并且

$$\frac{\alpha - \alpha^2}{2} n^2 = \frac{1}{2} (\alpha(G)n - \alpha(G)^2).$$

另一方面,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_1^2}{2} n_1^2 = \frac{1}{2} (\alpha(G_1)n_1 - \alpha(G_1)^2).$$

因此, 我们只要证明

$$\alpha(G)n - \alpha(G)^2 \geq \alpha(G_1)n_1 - \alpha(G_1)^2,$$

因为由 $n_1 \leq n$ 可知

$$\alpha(G_1)n - \alpha(G_1)^2 \geq \alpha(G_1)n_1 - \alpha(G_1)^2.$$

将前一个不等式除以 n^2 , 得到

$$\frac{\alpha(G)}{n} - \frac{\alpha(G)^2}{n^2} \geq \frac{\alpha(G_1)}{n} - \frac{\alpha(G_1)^2}{n^2}.$$

由于 $\alpha(G_1) \leq \alpha(G) < n/2$, 而函数 $f(x) = x - x^2$ 在区间 $(0, 1/2)$ 上单调递增, 因此上式成立。□

 在证明主定理时, 我们不妨设 $\alpha(G) \geq 2$; 否则 $\alpha(G) = 1$, 这时 G 是完全图, 结论是平凡的。我们结合前面两个断言可知, 我们所研究的问题到后面实际上只需考虑这样一类图: 它们的顶点数满足

$$n \geq \sqrt{\alpha(G)N/2} \geq \sqrt{N} = \exp\left(\frac{5 \log(1/\nu)}{\nu}\right) = \exp(2500 \log 500),$$

并且最小度至少为 $n/4$ 。

2.2 寻找一个大的拟随机二分对

Definition. 如果二部图 F 的两部分是 A, B , 并且对任意满足

$$|A'| \geq \varepsilon|A|, \quad |B'| \geq \varepsilon|B|$$

的子集 $A' \subseteq A, B' \subseteq B$, 都有

$$|d_F(A, B) - d_F(A', B')| \leq \varepsilon,$$

那么就称 F 是一个 ε -regular pair。



Definition 2.3. 若二部图 F 的两部分为 A, B , 并且对任意满足

$$|A'| \geq \varepsilon|A|, \quad |B'| \geq \varepsilon|B|$$

的子集 $A' \subseteq A, B' \subseteq B$, 都有

$$d_F(A', B') \geq \varepsilon,$$

则称 F 是一个 ε^+ -regular pair。



Claim 2.4. 若 $F = F(A, B)$ 是一个二部图, 且 $1 \leq k \leq |A|$ 、 $1 \leq m \leq |B|$, 则

$$d_F(A, B) = \frac{1}{\binom{|A|}{k} \binom{|B|}{m}} \sum_{X \in \binom{A}{k}, Y \in \binom{B}{m}} d_F(X, Y).$$



 (这里原文没有证明, 我自己补充一下)

对所有满足 $|X| = k$ 、 $|Y| = m$ 的子集对 (X, Y) , 我们考虑二部图 $F[X, Y]$ 中边的总数之和。固定一条边 $ab \in E(A, B)$, 其中 $a \in A$ 、 $b \in B$ 。它恰好会在

$$\binom{|A| - 1}{k - 1} \binom{|B| - 1}{m - 1}$$

个子集对 (X, Y) 中出现, 因为我们需要在 $A \setminus \{a\}$ 中再选出 $k - 1$ 个点, 在 $B \setminus \{b\}$ 中再选出 $m - 1$ 个点。因此

$$\sum_{X \in \binom{A}{k}, Y \in \binom{B}{m}} e_F(X, Y) = e_F(A, B) \binom{|A| - 1}{k - 1} \binom{|B| - 1}{m - 1}.$$

左右两边同时除以

$$\binom{|A|}{k} \binom{|B|}{m} km$$

又因为

$$\frac{\binom{|A| - 1}{k - 1}}{\binom{|A|}{k}} = \frac{k}{|A|}, \quad \frac{\binom{|B| - 1}{m - 1}}{\binom{|B|}{m}} = \frac{m}{|B|},$$

就得到

$$\frac{1}{\binom{|A|}{k} \binom{|B|}{m}} \sum_{X \in \binom{A}{k}, Y \in \binom{B}{m}} \frac{e_F(X, Y)}{km} = \frac{e_F(A, B)}{|A||B|}.$$

这也就是我们所要证明的等式。

Lemma 2.5. 设 $F[A, B]$ 是一个二部图, 其中 $|A| = a$ 、 $|B| = b$, 并且 A 中每个顶点在 B 中至少有 δb 个邻点。若 $0 < \varepsilon \leq \delta/6$, 则 F 含有一个 ε^+ -regular pair 子图 $F[X, Y]$, 满足

$$|X| \geq \exp\left(-\frac{2 \log(2/\varepsilon) \log(2/\delta)}{\varepsilon}\right) a, \quad |Y| \geq (\delta - 2\varepsilon)b,$$

并且对每个 $v \in X$ 都有

$$\deg(v, Y) \geq (\delta - 2\varepsilon)b.$$



Proof. 我们构造两列集合

$$X_0, X_1, \dots, X_\ell, \quad Y_0, Y_1, \dots, Y_\ell,$$

其中 $X_0 = A$ 、 $Y_0 = B$, 并要求 $F[X_\ell, Y_\ell]$ 是一个 ε^+ -regular pair, 而且对每个 $1 \leq i \leq \ell$, 都有

$$X_i \subset X_{i-1}, \quad Y_i \subset Y_{i-1},$$

并满足

$$\varepsilon |X_{i-1}|/2 \leq |X_i| \leq \varepsilon |X_{i-1}|$$

以及

$$|Y_i| = (1 - \varepsilon)|Y_{i-1}|.$$

这样最后只需取 $X = X_\ell$ 、 $Y = Y_\ell$ 即可。

我们通过一个迭代来构造这些集合：若在第 i 步时 $F[X_i, Y_i]$ 已经是 ε^+ -regular pair，那么过程停止。另一个停止条件是：若对某个 i 有

$$|Y_i| \leq (\delta(1 + \varepsilon/2) - 2\varepsilon)b,$$

也停止。

 后面我们会说明，在这种情形下 $F[X_i, Y_i]$ 同样必然是一个 ε^+ -regular pair。

开始时先检查 $F[X_0, Y_0]$ 是否已经是 ε^+ -regular pair。若是，则停止。若不是，则存在 $S \subseteq X_0$ 、 $T \subseteq Y_0$ ，满足

$$|S| \geq \varepsilon|X_0|, \quad |T| \geq \varepsilon|Y_0|,$$

并且

$$d_F(S, T) < \varepsilon.$$

令

$$k = \varepsilon|X_0|, \quad m = \varepsilon|Y_0|,$$

于是， S 的所有 k 元子集与 T 的所有 m 元子集之间的平均密度小于 ε 。

 平均密度小于 ε 是由 *claim 2.4*,

$$d_F(S, T) = \frac{1}{\binom{|S|}{k}\binom{|T|}{m}} \sum_{X \in \binom{S}{k}, Y \in \binom{T}{m}} d_F(X, Y).$$

又因为 $d_F(S, T) < \varepsilon$ ，所以

$$\frac{1}{\binom{|S|}{k}\binom{|T|}{m}} \sum_{X \in \binom{S}{k}, Y \in \binom{T}{m}} d_F(X, Y) < \varepsilon.$$

这就是说，在所有满足 $|X| = k$ 、 $|Y| = m$ 的子集对 (X, Y) 中，密度 $d_F(X, Y)$ 的平均值小于 ε 。因此必存在某一对子集 $X'_1 \subseteq S$ 、 $Y'_1 \subseteq T$ ，满足 $|X'_1| = k$ 、 $|Y'_1| = m$ ，并且

$$d_F(X'_1, Y'_1) < \varepsilon.$$

也就是：

$$e(F[X'_1, Y'_1]) < \varepsilon|X'_1||Y'_1|.$$

因此存在

$$X'_1 \subseteq S, \quad Y'_1 \subseteq T$$

使得

$$|X'_1| = \varepsilon|X_0|, \quad |Y'_1| = \varepsilon|Y_0|,$$

并且

$$e(F[X'_1, Y'_1]) < \varepsilon|X'_1||Y'_1|.$$

定义

$$X''_1 = \{x \in X'_1 : \deg(x, Y'_1) > 2\varepsilon|Y'_1|\}.$$

我们可得

$$|X''_1| \leq |X'_1|/2.$$

 这里我们用简单的反证法即可说明。首先由 X_1'' 的定义我们有：

$$e(F[X_1', Y_1']) > |X_1''| \cdot 2|Y_1'|.$$

若

$$|X_1''| > |X_1'|/2,$$

则

$$\varepsilon > \frac{e(F[X_1', Y_1'])}{|X_1'| |Y_1'|} > \frac{|X_1''| \cdot 2|Y_1'|}{2|X_1''| \cdot |Y_1'|} = \varepsilon.$$

矛盾！

令

$$X_1 = X_1' - X_1'',$$

也就是说， X_1 由 X_1' 中那些在 Y_1' 中至多有 $2\varepsilon|Y_1'|$ 个邻点的顶点组成。于是

$$|X_1'|/2 \leq |X_1| \leq |X_1'|.$$

再令

$$Y_1 = Y_0 - Y_1'.$$

同时由 X_1', Y_1' 的定义我们有

$$\varepsilon|X_0|/2 \leq |X_1| \leq \varepsilon|X_0|, \quad |Y_1| = (1 - \varepsilon)|Y_0|.$$

对 $i \geq 2$, 完全类似。若 $F[X_{i-1}, Y_{i-1}]$ 不是 ε^+ -regular pair, 我们的做法和前面相同, 由 claim 2.4 可以找到

$$X_i' \subset X_{i-1}, \quad Y_i' \subset Y_{i-1},$$

使得

$$|X_i'| = \varepsilon|X_{i-1}|, \quad |Y_i'| = \varepsilon|Y_{i-1}|,$$

并且

$$e(F[X_i', Y_i']) < \varepsilon|X_i'| |Y_i'|.$$

同样定义

$$X_i'' = \{x \in X_i' : \deg(x, Y_i') > 2\varepsilon|Y_i'|\},$$

则有

$$|X_i''| \leq |X_i'|/2.$$

接着令

$$X_i = X_i' - X_i'', \quad Y_i = Y_{i-1} - Y_i'.$$

于是

$$|X_i'|/2 \leq |X_i| \leq |X_i'|,$$

也就是

$$\varepsilon|X_{i-1}|/2 \leq |X_i| \leq \varepsilon|X_{i-1}|, \quad |Y_i| = (1 - \varepsilon)|Y_{i-1}|.$$

这就证明了对每个 i , 上面要求的关于 $|X_i|$ 与 $|Y_i|$ 的估计都成立。

接下来我们由 claim 2.6。若 $u \in X_\ell$, 则它在

$$Y_1' \cup \dots \cup Y_\ell'$$

中的邻点数至多为

$$2\varepsilon(|Y'_1| + \cdots + |Y'_\ell|).$$

因此

$$\deg(u, Y_\ell) \geq (\delta - 2\varepsilon)b.$$

这同时也说明

$$|Y_\ell| \geq (\delta - 2\varepsilon)b.$$

 下面说明, 如果

$$(\delta - 2\varepsilon)b \leq |Y_\ell| \leq (\delta(1 + \varepsilon/2) - 2\varepsilon)b,$$

那么 $F[X_\ell, Y_\ell]$ 必然是一个 ε^+ -regular pair。

我们任取 $u \in X_\ell$, 则 u 在 Y_ℓ 中的非邻点数至多为

$$|Y_\ell| - (\delta - 2\varepsilon)b \leq (\delta(1 + \varepsilon/2) - 2\varepsilon)b - (\delta - 2\varepsilon)b = \delta\varepsilon b/2.$$

任取 $Y' \subset Y_\ell$, 满足

$$|Y'| = \varepsilon|Y_\ell|.$$

则 u 在 Y' 中的邻点数至少为

$$\varepsilon|Y_\ell| - \delta\varepsilon b/2.$$

接下来, 我们来验证

$$\varepsilon|Y_\ell| - \delta\varepsilon b/2 \geq \varepsilon|Y'| = \varepsilon^2|Y_\ell| = \varepsilon|Y'|.$$

 如果我们需要验证的这个是成立的, 那么对任意满足 $|Y'| = \varepsilon|Y_\ell|$ 的子集 $Y' \subset Y_\ell$, 以及任意 $u \in X_\ell$, 它在 Y' 中至少有 $\varepsilon|Y'|$ 个邻点。于是对任意 $X' \subset X_\ell$, $Y' \subset Y_\ell$, 只要

$$|Y'| = \varepsilon|Y_\ell|,$$

就有

$$e(X', Y') \geq \varepsilon|X'||Y'|.$$

这就说明如果迭代过程是因为第二个停止条件而停止, 那么最终得到的二分对一定是 ε^+ -regular 的。

我们要验证的等价于

$$|Y_\ell|(1 - \varepsilon) \geq \delta b/2.$$

由于

$$|Y_\ell| \geq (\delta - 2\varepsilon)b,$$

故我们只需证明

$$(\delta - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon) \geq \delta/2.$$

而由 $\varepsilon \leq \delta/6 \leq 1/6$ 可知

$$(\delta - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon) \geq \frac{2\delta}{3} \cdot \frac{5}{6} > \frac{\delta}{2}.$$

故成立。这就说明, 如果迭代过程是因为第二个停止条件而停止, 那么最终得到的二分对一定是 ε^+ -regular 的。

下面我们来估计迭代步数 ℓ 。在每一次迭代中， Y 一侧都缩小 $(1 - \varepsilon)$ 倍。同时我们又知道

$$|Y_\ell| \geq (\delta - 2\varepsilon)b.$$

因此

$$(1 - \varepsilon)^\ell \geq (\delta - 2\varepsilon) > \delta/2.$$

于是

$$\ell < \frac{\log(2/\delta)}{\log(1/(1 - \varepsilon))} < \frac{\log(2/\delta)}{\varepsilon},$$

 这里是由于

$$e^\varepsilon < \frac{1}{1 - \varepsilon} \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

两边取对数就有

$$\log\left(\frac{1}{1 - \varepsilon}\right) > \varepsilon$$

最后我们来估计 $|X_\ell|$ 。对每个 $i \geq 1$ ，都有

$$|X_i|/|X_{i-1}| \geq \varepsilon/2.$$

因此

$$|X_\ell| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^\ell a \geq \exp\left(-\frac{2\log(2/\varepsilon)\log(2/\delta)}{\varepsilon}\right) a.$$

这就完成了我们的证明。

 lemma 2.5 可以说是支撑这整个证明的最重要的一个引理。相比 lemma 2.5，我们引入了一个新参数进行推广，得到了一个更精细的下界，具体请见 proposition 4.2。

□

Claim 2.6. 若 $i \geq 1$ 且 $u \in X_i$ ，那么 u 在

$$Y'_1 \cup Y'_2 \cup \dots \cup Y'_i$$

中的邻点数至多为

$$2\varepsilon(|Y'_1| + \dots + |Y'_i|).$$



 (这里原文没有证明，说是留给读者自己去证明，我自己补充一下)

对每个 $j \in \{1, \dots, i\}$ ，由于

$$X_j = X'_j - X''_j, \quad X''_j = \{x \in X'_j : \deg(x, Y'_j) > 2\varepsilon|Y'_j|\},$$

所以凡是属于 X_j 的顶点 u ，都满足

$$\deg(u, Y'_j) \leq 2\varepsilon|Y'_j|.$$

另一方面，由构造可知

$$X_i \subseteq X_{i-1} \subseteq \dots \subseteq X_1,$$

因此若 $u \in X_i$ ，那么对每个 $1 \leq j \leq i$ 都有 $u \in X_j$ ，从而

$$\deg(u, Y'_j) \leq 2\varepsilon|Y'_j|.$$

又因为

$$Y_j = Y_{j-1} - Y'_j \quad (1 \leq j \leq i),$$

所以各个集合 $Y'_1, Y'_2, \dots, Y'_i$ 两两不交。于是 u 在并集

$$Y'_1 \cup Y'_2 \cup \dots \cup Y'_i$$

中的邻点数就是它在这些集合中的邻点数之和，因此

$$\deg(u, Y'_1 \cup Y'_2 \cup \dots \cup Y'_i) = \sum_{j=1}^i \deg(u, Y'_j) \leq \sum_{j=1}^i 2\varepsilon |Y'_j| = 2\varepsilon (|Y'_1| + \dots + |Y'_i|).$$

3 主定理的证明

Observation 3.1. 设 F 是一个 K_4 -free 图， $S \subseteq V(F)$ ，且 $uv \in E(F)$ 。则

$$\deg_F(u, S) + \deg_F(v, S) \leq |S| + \alpha(F).$$

 (这里原文没有证明，我自己补充一下)

我们记

$$N_F(u, S) = N_F(u) \cap S, \quad N_F(v, S) = N_F(v) \cap S.$$

由于 $uv \in E(F)$ 且 F 不含 K_4 ，所以任意两个同时属于

$$N_F(u, S) \cap N_F(v, S)$$

的顶点都不能相邻；否则若 $x, y \in N_F(u, S) \cap N_F(v, S)$ 且 $xy \in E(F)$ ，那么 $\{u, v, x, y\}$ 就构成一个 K_4 ，矛盾。因此

$$N_F(u, S) \cap N_F(v, S)$$

是 F 的一个独立集，从而

$$|N_F(u, S) \cap N_F(v, S)| \leq \alpha(F).$$

另一方面，

$$\begin{aligned} \deg_F(u, S) + \deg_F(v, S) &= |N_F(u, S)| + |N_F(v, S)| \\ &= |N_F(u, S) \cup N_F(v, S)| + |N_F(u, S) \cap N_F(v, S)| \leq |S| + \alpha(F). \end{aligned}$$

故结论成立。

Fact 3.2. 有

$$\alpha = \alpha(G)/n < \exp\left(-\frac{\log(2/\nu)}{\nu}\right) \nu^2 < \nu^3.$$

 (这里原文没有证明，我自己补充一下)

由 *theorem 1.3* 的条件，

$$\alpha \leq \gamma = \exp\left(-\frac{10 \log(1/\nu)}{\nu}\right).$$

因此只需证明

$$\gamma < \exp\left(-\frac{\log(2/\nu)}{\nu}\right) \nu^2 < \nu^3.$$

对第一个不等式，两边取对数后，我们只需验证

$$-\frac{10 \log(1/\nu)}{\nu} < -\frac{\log(2/\nu)}{\nu} + 2 \log \nu.$$

等价地，

$$10 \log(1/\nu) > \log(2/\nu) + 2\nu \log(1/\nu).$$

而

$$\log(2/\nu) = \log 2 + \log(1/\nu),$$

所以只需证明

$$(9 - 2\nu) \log(1/\nu) > \log 2,$$

这对 $\nu = 1/500$ 显然成立。于是

$$\gamma < \exp\left(-\frac{\log(2/\nu)}{\nu}\right) \nu^2.$$

对第二个不等式，我们只需证明

$$\exp\left(-\frac{\log(2/\nu)}{\nu}\right) < \nu.$$

两边取对数后，等价于

$$\frac{\log(2/\nu)}{\nu} > \log(1/\nu).$$

而

$$\log(2/\nu) = \log 2 + \log(1/\nu) > \nu \log(1/\nu),$$

故上式成立，从而

$$\exp\left(-\frac{\log(2/\nu)}{\nu}\right) \nu^2 < \nu^3.$$

 接下来我们来证明论文的主定理 *theorem 1.3*，分成 5 个 *Step*。

Step 1

任取一个大小为 νn 的点集 $B_0 \subset V$ ，令 $A_0 = V \setminus B_0$ 。由于前面已经把原本要证明的问题约化到 $\delta(G) \geq n/4$ 的情形，所以对每个 $v \in B_0$ ，都有

$$\deg(v, A_0) \geq \frac{n}{4} - |B_0| = \left(\frac{1}{4} - \nu\right) n.$$

我们将 lemma 2.5 应用于二部图 $G[B_0, A_0]$ ，其中取

$$\varepsilon = \nu, \quad \delta = \frac{(1/4 - \nu)n}{|A_0|} = \frac{1/4 - \nu}{1 - \nu},$$

得到一个 ν^+ -regular 对 $G[B_1, A_1]$ ，其中 $B_1 \subseteq B_0$ 、 $A_1 \subseteq A_0$ ，并且

$$|A_1| \geq (\delta - 2\nu)|A_0| = \left(\frac{1}{4} - 3\nu + 2\nu^2\right) n,$$

且对每个 $v \in B_1$ ，都有

$$\deg(v, A_1) \geq (\delta - 2\nu)|A_0| = \left(\frac{1}{4} - 3\nu + 2\nu^2\right) n.$$

Claim 3.3. 由于 G 不含 K_4 , 有

$$|A_1| \geq \frac{n}{2} - 6\nu n - \alpha(G).$$



Proof. 首先 $|B_1| > \alpha(G)$, 于是 B_1 不是独立集, 所以存在一条边 $uv \in E(G[B_1])$ 。

 (论文对 $|B_1| > \alpha(G)$ 没有证明, 我补充了一下证明) 由 lemma 2.5,

$$|B_1| \geq \exp\left(-\frac{2\log(2/\nu)\log(2/\delta)}{\nu}\right) |B_0|,$$

其中

$$\delta = \frac{1/4 - \nu}{1 - \nu} > \frac{1}{5}.$$

因此

$$|B_1| > \exp\left(-\frac{5\log(2/\nu)}{\nu}\right) \nu n.$$

另一方面, 由 fact 3.2,

$$\alpha(G) = \alpha n < \exp\left(-\frac{\log(2/\nu)}{\nu}\right) \nu^2 n.$$

由于 $\nu = 1/500$, 有

$$\exp\left(-\frac{5\log(2/\nu)}{\nu}\right) \nu > \exp\left(-\frac{\log(2/\nu)}{\nu}\right) \nu^2,$$

故

$$|B_1| > \alpha(G).$$

由 observation 3.1 (取 $F = G$, $S = A_1$) 可得

$$\deg(u, A_1) + \deg(v, A_1) \leq |A_1| + \alpha(G).$$

另外, 由于对每个 $v \in B_1$ 都有

$$\deg(v, A_1) \geq \left(\frac{1}{4} - 3\nu + 2\nu^2\right) n.$$

因此

$$|A_1| + \alpha(G) \geq 2 \left(\frac{1}{4} - 3\nu + 2\nu^2\right) n = \left(\frac{1}{2} - 6\nu + 4\nu^2\right) n.$$

于是

$$|A_1| \geq \left(\frac{1}{2} - 6\nu + 4\nu^2\right) n - \alpha(G) \geq \frac{n}{2} - 6\nu n - \alpha(G).$$

故结论成立。 □

Step 2

我们定义

$$A_2 = A_1 - \{v \in A_1 : \deg(v, B_1) < \nu|B_1|\} = \{v \in A_1 : \deg(v, B_1) \geq \nu|B_1|\}.$$

也就是说, 我们从 A_1 中删去所有在 B_1 中邻点少于 $\nu|B_1|$ 的顶点。由于在 **Step 1** 中得到的 $G[B_1, A_1]$ 是一个 ν^+ -regular pair, 我们记

$$X = \{v \in A_1 : \deg(v, B_1) < \nu|B_1|\}$$

若满足 $|X| \geq \nu|A_1|$, 那么就会有

$$d_G(X, B_1) < \nu,$$

这与 ν^+ -regular 性矛盾。因此

$$|X| < \nu|A_1|, \quad |A_2| = |A_1| - |X| \geq (1 - \nu)|A_1|.$$

结合 **Step 1** 中对 $|A_1|$ 的下界, 可得

$$|A_2| \geq (1 - \nu)|A_1| \geq |A_1| - \nu n \geq \frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G).$$

此外, 对每个 $v \in B_1$, 由于至多删去了 νn 个 A_1 中的顶点, 而在 **Step 1** 中已经有

$$\deg(v, A_1) \geq \frac{n}{4} - 3\nu n,$$

故

$$\deg(v, A_2) \geq \deg(v, A_1) - \nu n \geq \frac{n}{4} - 4\nu n.$$

Claim 3.4. 对每个 $v \in A_2$, 其在 A_2 内的度满足

$$\deg(v, A_2) \leq \nu|A_1|.$$

Proof. 假设存在某个 $v \in A_2$ 满足

$$\deg(v, A_2) > \nu|A_1|.$$

由于 $v \in A_2$, 按定义有

$$|N(v) \cap B_1| = \deg(v, B_1) \geq \nu|B_1|.$$

又因为 $G[B_1, A_1]$ 是一个 ν^+ -regular pair, 而

$$|N(v) \cap A_2| = \deg(v, A_2) > \nu|A_1|, \quad |N(v) \cap B_1| = \deg(v, B_1) \geq \nu|B_1|,$$

所以在二部图

$$G[N(v) \cap A_2, N(v) \cap B_1]$$

中, 边密度至少为 ν 。因此存在某个顶点 $w \in N(v) \cap B_1$, 使得它在 $N(v) \cap A_2$ 中至少有

$$\nu|N(v) \cap A_2| = \nu \deg(v, A_2) \geq \nu^2|A_1|$$

个邻点。

另一方面, 由前面的 $|A_1| \geq n/2 - 6\nu n - \alpha(G)$ 以及 fact 3.2 可得

$$|A_1| > \frac{n}{3},$$

从而

$$\nu^2|A_1| > \frac{\nu^2 n}{3} > \alpha(G).$$

于是 w 在 $N(v) \cap A_2$ 中有多于 $\alpha(G)$ 个邻点, 所以其中必有两个顶点彼此相邻。设这两个顶点为 x, y 。那么

$$v, w, x, y$$

两两相邻, 从而构成一个 K_4 , 矛盾! 故

$$\deg(v, A_2) \leq \nu|A_1|$$

对每个 $v \in A_2$ 都成立。 □

Step 3

对于二部图 $G[A_2, V \setminus A_2]$, 由 claim 3.4, 每个 $v \in A_2$ 在 $V \setminus A_2$ 中至少有

$$\frac{n}{4} - \nu n$$

个邻点, 由 lemma 2.5, 我们得到一个 ν^+ -regular pair

$$(A'_2, B_2),$$

其中

$$A'_2 \subseteq A_2, \quad B_2 \subseteq V \setminus A_2,$$

并且

$$|A'_2| \geq \exp\left(-\frac{2\log(2/\nu)}{\nu}\right) \frac{\nu n}{3}, \quad |B_2| \geq \frac{n}{2} - 6\nu n - \alpha(G).$$

 由 lemma 2.5, 对每个 $v \in A'_2$ 都有

$$\deg(v, B_2) \geq \frac{n}{4} - 3\nu n.$$

由于

$$|A'_2| \geq \exp\left(-\frac{2\log(2/\nu)}{\nu}\right) \frac{\nu n}{3},$$

再结合 fact 3.2 可知 $|A'_2| > \alpha(G)$ 。因此 A'_2 不是独立集, 于是存在一条边

$$uv \in E(G[A'_2]).$$

现在对这条边应用 observation 3.1, 取 $F = G$ 、 $S = B_2$, 便有

$$\deg(u, B_2) + \deg(v, B_2) \leq |B_2| + \alpha(G).$$

另一方面, 由上面的度下界,

$$\deg(u, B_2) \geq \frac{n}{4} - 3\nu n, \quad \deg(v, B_2) \geq \frac{n}{4} - 3\nu n.$$

因此

$$|B_2| + \alpha(G) \geq \frac{n}{2} - 6\nu n,$$

从而

$$|B_2| \geq \frac{n}{2} - 6\nu n - \alpha(G).$$

和前面对 A_1 的处理一样, 我们删去 B_2 中那些在 A'_2 中邻点少于 $\nu|A'_2|$ 的顶点。定义

$$B_3 = B_2 - \{v \in B_2 : \deg(v, A'_2) < \nu|A'_2|\} = \{v \in B_2 : \deg(v, A'_2) \geq \nu|A'_2|\}.$$

由 ν^+ -regular 性可得

$$|B_3| \geq (1 - \nu)|B_2| \geq |B_2| - \nu n \geq \frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G).$$

 这里的下界还可以进一步改进。对每个 $v \in A'_2$ ，由 *claim 3.4* 和 *lemma 2.5* 可得

$$\deg(v, B_2) \geq \frac{n}{4} - \nu|A_1| - 2\nu|V \setminus A_2|.$$

又因为 $|A_2| \geq (1 - \nu)|A_1|$ ，所以

$$\begin{aligned} \nu|A_1| + 2\nu|V \setminus A_2| &= \nu|A_1| + 2\nu(n - |A_2|) \\ &\leq 2\nu n - (1 - 2\nu)\nu|A_1| \\ &< 2\nu n. \end{aligned}$$

因此

$$\deg(v, B_2) > \frac{n}{4} - 2\nu n.$$

由于 $|A'_2| > \alpha(G)$ ，可以在 A'_2 中取一条边 uv 。对这条边应用 *observation 3.1*，得到

$$|B_2| + \alpha(G) \geq \deg(u, B_2) + \deg(v, B_2) > \frac{n}{2} - 4\nu n.$$

从而

$$|B_2| > \frac{n}{2} - 4\nu n - \alpha(G).$$

再由 B_3 的定义和 ν^+ -regular 性，

$$|B_3| \geq (1 - \nu)|B_2| \geq |B_2| - \nu n > \frac{n}{2} - 5\nu n - \alpha(G).$$

Claim 3.5. 对每个 $v \in B_3$ ，其在 B_3 内的度满足

$$\deg(v, B_3) \leq \nu|B_2|.$$



 假设存在某个 $v \in B_3$ 满足

$$\deg(v, B_3) > \nu|B_2|.$$

由于 $v \in B_3$ ，按定义有

$$\deg(v, A'_2) \geq \nu|A'_2|.$$

又因为 $G[A'_2, B_2]$ 是一个 ν^+ -regular pair，而

$$|N(v) \cap A'_2| = \deg(v, A'_2) \geq \nu|A'_2|, \quad |N(v) \cap B_3| = \deg(v, B_3) > \nu|B_2|,$$

所以二部图

$$G[N(v) \cap A'_2, N(v) \cap B_3]$$

的边密度至少为 ν 。因此存在某个顶点 $w \in N(v) \cap A'_2$ ，使得它在 $N(v) \cap B_3$ 中至少有

$$\nu|N(v) \cap B_3| = \nu \deg(v, B_3) \geq \nu^2|B_2|$$

个邻点。

另一方面，由 *Step 3* 中的下界

$$|B_2| \geq \frac{n}{2} - 6\nu n - \alpha(G) > \frac{n}{3}$$

以及 *fact 3.2* 可得

$$\nu^2|B_2| > \frac{\nu^2 n}{3} > \alpha(G).$$

于是 w 在 $N(v) \cap B_3$ 中有多于 $\alpha(G)$ 个邻点, 所以其中必有两个顶点彼此相邻。设这两个顶点为 x, y 。那么

$$v, w, x, y$$

两两相邻, 从而构成一个 K_4 , 矛盾! 因此对每个 $v \in B_3$, 都只能有

$$\deg(v, B_3) \leq \nu|B_2|.$$

Step 4

我们把 $V - (A_2 \cup B_3)$ 分成 A' 和 B' :

$$A' = \{v \in V \setminus (A_2 \cup B_3) : \deg(v, B_3) \geq \deg(v, A_2)\},$$

$$B' = \{v \in V \setminus (A_2 \cup B_3) : \deg(v, B_3) < \deg(v, A_2)\}.$$

再令

$$A = A_2 \cup A', \quad B = B_3 \cup B'.$$

有

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = V.$$

且

$$\frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G) \leq |A|, \quad |B| \leq \frac{n}{2} + 7\nu n + \alpha(G)$$

 由 **Step 3** 我们可知

$$\frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G) \leq |A_2|.$$

又由于

$$A = A_2 \cup A',$$

故

$$|A| \geq |A_2| \geq \frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G).$$

另一方面, 由于

$$A \cup B = V,$$

故

$$|B| = n - |A| \leq n - \left(\frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G)\right) = \frac{n}{2} + 7\nu n + \alpha(G).$$

Observation 3.6. 对每个 $v \in A'$, 有

$$\deg(v, B_3) \geq n/9;$$

对每个 $u \in B'$, 有

$$\deg(u, A_2) \geq n/9.$$



原论文在这里写出的下界是 $n/9$ ，但若只使用前面已经粗化过的不等式

$$|V \setminus (A_2 \cup B_3)| \leq 14\nu n + 2\alpha(G),$$

则对 $v \in A'$ 只能保证

$$\deg(v, B_3) \geq \left(\frac{1}{8} - 7\nu\right)n - \alpha(G).$$

当 $\nu = 1/500$ 时，这个下界略小于 $n/9$ ，所以前面粗略估计不足以证明原结论。不过，保留 **Step 3** 中应用 *lemma 2.5* 时得到的度数范围，我们可以把 B_3 的下界加强到

$$|B_3| > \frac{n}{2} - 5\nu n - \alpha(G),$$

从而补全 $n/9$ 的证明。



(这里原文没有证明，我自己补充一下)

由 *claim 3.4* 可知，对每个 $v \in A_2$ ，都有

$$\deg(v, V \setminus A_2) \geq \frac{n}{4} - \nu|A_1|.$$

将 *lemma 2.5* 应用于二部图 $G[A_2, V \setminus A_2]$ 时，得到的集合 A'_2, B_2 满足：对每个 $v \in A'_2$ ，

$$\deg(v, B_2) \geq \frac{n}{4} - \nu|A_1| - 2\nu|V \setminus A_2|.$$

又因为 $|A_2| \geq (1 - \nu)|A_1|$ ，所以

$$\begin{aligned} \deg(v, B_2) &\geq \frac{n}{4} - \nu|A_1| - 2\nu(n - |A_2|) \\ &\geq \frac{n}{4} - 2\nu n + (\nu - 2\nu^2)|A_1| \\ &> \frac{n}{4} - 2\nu n. \end{aligned}$$

由 $|A'_2| > \alpha(G)$ ，可在 A'_2 中取一条边。再对这条边应用 *observation 3.1*，得到

$$|B_2| > \frac{n}{2} - 4\nu n - \alpha(G).$$

由 B_3 的定义及 ν^+ -regular 性，

$$|B_3| \geq (1 - \nu)|B_2| \geq |B_2| - \nu n > \frac{n}{2} - 5\nu n - \alpha(G).$$

再结合 **Step 2** 中

$$|A_2| \geq \frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G),$$

便有

$$|V \setminus (A_2 \cup B_3)| < 12\nu n + 2\alpha(G) < (12\nu + 2\nu^3)n < \frac{n}{36}.$$

因此，对任意 $x \in V \setminus (A_2 \cup B_3)$ ，由 $\delta(G) \geq n/4$ 可得

$$\deg(x, A_2) + \deg(x, B_3) > \frac{n}{4} - \frac{n}{36} = \frac{2n}{9}.$$

若 $x \in A'$ ，则 $\deg(x, B_3) \geq \deg(x, A_2)$ ，故

$$\deg(x, B_3) > \frac{n}{9}.$$

若 $x \in B'$ ，则 $\deg(x, A_2) > \deg(x, B_3)$ ，故

$$\deg(x, A_2) > \frac{n}{9}.$$

 上面的计算实际上给出了比 $n/9$ 更精确的结论。由

$$|A_2| \geq \frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G), \quad |B_3| > \frac{n}{2} - 5\nu n - \alpha(G)$$

可得

$$|V \setminus (A_2 \cup B_3)| < 12\nu n + 2\alpha(G) < (12\nu + 2\nu^3)n.$$

因此, 对任意 $x \in V \setminus (A_2 \cup B_3)$, 都有

$$\deg(x, A_2) + \deg(x, B_3) > \left(\frac{1}{4} - 12\nu - 2\nu^3\right)n.$$

结合 A' 、 B' 的定义, 可以进一步得到

$$\deg(x, B_3) > \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3\right)n \quad (x \in A'),$$

以及

$$\deg(x, A_2) > \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3\right)n \quad (x \in B').$$

Claim 3.7. 若 $v \in A$, 则

$$\deg(v, A \setminus A') \leq \alpha(G);$$

同理, 若 $u \in B$, 则

$$\deg(u, B \setminus B') \leq \alpha(G).$$



Proof. 我们只证明关于 A 的部分; 关于 B 的部分的证明完全相同。假设存在某个 $v \in A$ 满足

$$\deg(v, A \setminus A') > \alpha(G).$$

于是

$$N(v) \cap (A \setminus A')$$

中存在一条边, 记其两个端点为 u_1, u_2 。由于 G 是 K_4 -free 图,

$$|N(u_1) \cap N(u_2)| \leq \alpha(G).$$

 若否, 若有

$$|N(u_1) \cap N(u_2)| > \alpha(G).$$

则存在 $w_1, w_2 \in N(u_1) \cap N(u_2)$, 那么此时

$$w_1, w_2, u_1, u_2$$

两两相连, 构成一个 K_4 , 矛盾!

另一方面, $u_1, u_2 \in A \setminus A' = A_2$ 。由 claim 3.4 可知, 它们在 A_2 内各自都只有少于 νn 个邻点。故它们在 A' 中的邻点数至多为

$$|A'| \leq |A'| + |B'| \leq 14\nu n + 2\alpha(G) < 15\nu n,$$

于是由 observation 3.1, 我们有

$$|(N(u_1) \cup N(u_2)) \cap B| > \frac{n}{2} - 33\nu n.$$

 由上面的估计可知, 对 $i = 1, 2$, 都有

$$\deg(u_i, A) < \nu n + 15\nu n = 16\nu n.$$

因此由 $\delta(G) \geq n/4$ 可得

$$\deg(u_i, B) \geq \frac{n}{4} - 16\nu n.$$

又因为 $u_1 u_2 \in E(G)$, 由 *observation 3.1* 作用于集合 B 得

$$\deg(u_1, B) + \deg(u_2, B) \leq |B| + \alpha(G).$$

另一方面,

$$|(N(u_1) \cup N(u_2)) \cap B| = \deg(u_1, B) + \deg(u_2, B) - |N(u_1) \cap N(u_2) \cap B|.$$

由

$$|N(u_1) \cap N(u_2) \cap B| \leq |N(u_1) \cap N(u_2)| \leq \alpha(G)$$

便得到

$$\begin{aligned} |(N(u_1) \cup N(u_2)) \cap B| &\geq \deg(u_1, B) + \deg(u_2, B) - \alpha(G) \\ &\geq 2 \left(\frac{n}{4} - 16\nu n \right) - \alpha(G) = \frac{n}{2} - 32\nu n - \alpha(G). \end{aligned}$$

再由 *fact 3.2* 知 $\alpha(G) = \alpha n < \nu^3 n < \nu n$, 所以

$$\frac{n}{2} - 32\nu n - \alpha(G) > \frac{n}{2} - 33\nu n.$$

另一方面, 由 **Step 4** 中对 $|B|$ 的上界可知

$$|B| \leq \left(\frac{1}{2} + 7\nu \right) n + \alpha(G),$$

从而

$$|B \setminus (N(u_1) \cup N(u_2))| < \left(\frac{1}{2} + 7\nu \right) n + \alpha(G) - \left(\frac{1}{2} - 33\nu \right) n < 41\nu n.$$

下面说明 v 在 B 中至少有 $n/9$ 个邻点. 若 $v \in A'$, 则由 *observation 3.6* 立刻有

$$\deg(v, B) \geq \deg(v, B_3) \geq \frac{n}{9}.$$

若 $v \in A_2$, 则由 *claim 3.4* 以及 $|A'| < 15\nu n$ 可得

$$\deg(v, A) \leq \deg(v, A_2) + |A'| < \nu n + 15\nu n = 16\nu n,$$

从而

$$\deg(v, B) \geq \delta(G) - \deg(v, A) \geq \frac{n}{4} - 16\nu n > \frac{n}{9}.$$

因此总有

$$|N(v) \cap B| \geq \frac{n}{9}.$$

若

$$|N(v) \cap N(u_1) \cap B| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{9} - 41\nu n \right)$$

且

$$|N(v) \cap N(u_2) \cap B| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{9} - 41\nu n \right),$$

那么

$$\begin{aligned} |N(v) \cap B| &\leq |N(v) \cap N(u_1) \cap B| + |N(v) \cap N(u_2) \cap B| + |B \setminus (N(u_1) \cup N(u_2))| \\ &< \left(\frac{n}{9} - 41\nu n\right) + 41\nu n = \frac{n}{9}, \end{aligned}$$

这与 $|N(v) \cap B| \geq n/9$ 矛盾。因此至少有一个集合

$$N(v) \cap N(u_1) \cap B, \quad N(v) \cap N(u_2) \cap B$$

的大小严格大于

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n}{9} - 41\nu n\right).$$

再由 fact 3.2 以及 $1/9 - 41\nu > 1/90$ 可得

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n}{9} - 41\nu n\right) > \alpha(G).$$

 由 $\nu = 1/500$ 可知

$$\frac{1}{9} - 41\nu = \frac{1}{9} - \frac{41}{500} > \frac{1}{90},$$

从而

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n}{9} - 41\nu n\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - 41\nu\right) n > \frac{n}{180}.$$

另一方面, 由 fact 3.2 有

$$\alpha(G) = \alpha n < \nu^3 n = \frac{n}{500^3} < \frac{n}{180}.$$

于是

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n}{9} - 41\nu n\right) > \alpha(G).$$

于是这两个集合中至少有一个含有多于 $\alpha(G)$ 个顶点, 从而其中必有两个顶点彼此相邻。无论出现在哪一个集合中, 这两个顶点都与 v 以及对应的 u_i 相邻, 从而构成一个 K_4 , 矛盾。

故对每个 $v \in A$ 都有

$$\deg(v, A \setminus A') \leq \alpha(G).$$

□

Corollary 3.8. 每个 A 中的顶点在 A 内至多有

$$|A'| + \alpha(G) < 16\nu n$$

个邻点; 同理, 每个 B 中的顶点在 B 内至多有

$$|B'| + \alpha(G) < 16\nu n$$

个邻点。



 任取 $v \in A$ 。由 claim 3.7 可知

$$\deg(v, A \setminus A') \leq \alpha(G).$$

因此

$$\deg(v, A) \leq \deg(v, A \setminus A') + |A'| \leq \alpha(G) + |A'|.$$

又由 **Step 4** 中

$$|A'| < |A'| + |B'| \leq 14\nu n + 2\alpha(G) < 15\nu n$$

以及 *fact 3.2* 中的 $\alpha(G) < \nu n$, 便得到

$$\deg(v, A) \leq |A'| + \alpha(G) < 16\nu n.$$

关于 B 的证明也完全相同。

Claim 3.9. 任意 $v \in A$ 都满足

$$\deg(v, A) \leq \alpha(G),$$

任意 $u \in B$ 都满足

$$\deg(u, B) \leq \alpha(G).$$



Proof. 我们只证明关于 A 的部分, 关于 B 的部分完全同理。假设存在某个 $v \in A$ 满足

$$\deg(v, A) > \alpha(G).$$

则集合

$$N(v) \cap A$$

的大小大于 $\alpha(G)$, 因而它不可能是独立集。于是其中存在两个相邻顶点, 记为 u, w 。这样 u, v, w 在 A 中构成一个三角形。

对这三个顶点, 利用 *corollary 3.8* 可知它们在 A 中的度都小于 $16\nu n$, 从而都在 B 中至少有

$$\delta(G) - 16\nu n \geq \frac{n}{4} - 16\nu n$$

个邻点。设

$$H_v = N(v) \cap B, \quad H_u = N(u) \cap B, \quad H_w = N(w) \cap B.$$

若三对交集

$$H_v \cap H_u, \quad H_v \cap H_w, \quad H_u \cap H_w$$

都至多有 $\alpha(G)$ 个顶点, 那么

$$\begin{aligned} |H_v| + |H_u| + |H_w| &\leq |H_v \cup H_u \cup H_w| + |H_v \cap H_u| + |H_v \cap H_w| + |H_u \cap H_w| \\ &\leq |B| + 3\alpha(G). \end{aligned}$$

另一方面,

$$|H_v| + |H_u| + |H_w| \geq 3 \left(\frac{n}{4} - 16\nu n \right) = \frac{3n}{4} - 48\nu n.$$

又由 **Step 4** 中的上界

$$|B| \leq \left(\frac{1}{2} + 7\nu \right) n + \alpha(G)$$

可知

$$\frac{3n}{4} - 48\nu n \leq |B| + 3\alpha(G) \leq \left(\frac{1}{2} + 7\nu \right) n + 4\alpha(G).$$

这推出

$$\left(\frac{1}{4} - 55\nu \right) n \leq 4\alpha(G).$$

但由 fact 3.2 有 $\alpha(G) < \nu n$, 于是右边小于 $4\nu n$, 从而

$$\left(\frac{1}{4} - 59\nu\right)n < 0,$$

这与 $\nu = 1/500$ 矛盾。

因此, 上面三对交集中至少有一对的大小大于 $\alpha(G)$ 。不妨设

$$|H_v \cap H_u| > \alpha(G).$$

那么集合

$$H_v \cap H_u$$

不可能是独立集, 于是其中存在两个相邻顶点 x, y 。于是

$$u, v, x, y$$

两两相邻, 构成一个 K_4 , 矛盾。

故对每个 $v \in A$ 都有

$$\deg(v, A) \leq \alpha(G).$$

□

Claim 3.10. 存在某个非负整数 $k \leq 3\alpha(G)$, 使得

$$\frac{n}{2} - k \leq |A|, |B| \leq \frac{n}{2} + k.$$



Proof. 在 Step 4 中我们已经得到

$$|A| \geq \frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G) > \alpha(G),$$

即集合 A 不可能是独立集, 因此 A 中存在一条边。取 $u, v \in A$ 且 $uv \in E(G)$ 。由 claim 3.9 可知

$$\deg(u, A), \deg(v, A) \leq \alpha(G).$$

又由最小度条件 $\delta(G) \geq n/4$, 得到

$$\deg(u, B) \geq \frac{n}{4} - \alpha(G), \quad \deg(v, B) \geq \frac{n}{4} - \alpha(G).$$

又由 observation 3.1 可得

$$|B| \geq \deg(u, B) + \deg(v, B) - \alpha(G) \geq 2\left(\frac{n}{4} - \alpha(G)\right) - \alpha(G) = \frac{n}{2} - 3\alpha(G).$$

 在 observation 3.1 取边 uv 以及 $S = B$ 。

同理也有

$$|A| \geq \frac{n}{2} - 3\alpha(G).$$

由于

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = V(G), \quad |V(G)| = n,$$

故 3

$$|B| = n - |A| \leq n - \left(\frac{n}{2} - 3\alpha(G)\right) = \frac{n}{2} + 3\alpha(G).$$

同理也有

$$|A| \leq \frac{n}{2} + 3\alpha(G)$$

即存在某个非负整数 $k \leq 3\alpha(G)$, 使得

$$\frac{n}{2} - k \leq |A|, |B| \leq \frac{n}{2} + k.$$

□

Claim 3.11. 图 $G[A]$ 与 $G[B]$ 都不含长度为 3, 5, 7 的奇圈。



Proof. 我们只证明 $G[A]$ 的情形, $G[B]$ 的证明完全同理。

由 claim 3.9 我们可知 $G[A]$ 中不含三角形, 因此我们只需证不包含 C_5 和 C_7 。

我们先证明 $G[A]$ 不含 C_5 。假设存在 C_5 , 即有

$$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in A$$

满足

$$v_i v_{i+1} \in E(G) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

对 $1 \leq i \leq 5$, 记

$$H_i = N(v_i) \cap B.$$

由于 G 是 K_4 -free 图, 集合 $H_1 \cap H_2$ 与 $H_2 \cap H_3$ 都是独立集, 从而

$$|H_1 \cap H_2| \leq \alpha(G), \quad |H_2 \cap H_3| \leq \alpha(G).$$

若否, 即若有

$$|H_1 \cap H_2| > \alpha(G).$$

则存在 $x, y \in H_1 \cap H_2$ 且 $xy \in E$, 则

$$v_1, v_2, x, y$$

两两相连, 即构成一个 K_4 , 矛盾!

另一方面, 由 claim 3.9 可知, 对每个 $1 \leq i \leq 5$, 都有

$$|H_i| = \deg(v_i, B) \geq \frac{n}{4} - \alpha(G).$$

再由 claim 3.10 得

$$|B \setminus H_{i+1}| \leq \frac{n}{2} + 3\alpha(G) - \left(\frac{n}{4} - \alpha(G)\right) = \frac{n}{4} + 4\alpha(G).$$

由于

$$H_i \subseteq (B \setminus H_{i+1}) \cup (H_i \cap H_{i+1}),$$

则对 $i = 1, 2, 3, 4$, 都有

$$|H_i| \leq \frac{n}{4} + 4\alpha(G) + \alpha(G) = \frac{n}{4} + 5\alpha(G).$$

又有

$$|B \setminus (H_1 \cup H_2)| = |B| - |H_1| - |H_2| + |H_1 \cap H_2| \leq \frac{n}{2} + 3\alpha(G) - 2\left(\frac{n}{4} - \alpha(G)\right) + \alpha(G) = 6\alpha(G).$$

故 v_3 在 $B \setminus (H_1 \cup H_2)$ 中至多有 $6\alpha(G)$ 个邻点, 而在 H_2 中至多还有 $\alpha(G)$ 个邻点, 所以

$$|H_1 \cap H_3| \geq \frac{n}{4} - 8\alpha(G).$$

 由于

$$B = H_1 \cup H_2 \cup (B - (H_1 \cap H_2)),$$

故

$$H_3 \subseteq (H_3 \cap H_2) \cup (H_3 \cap H_2) \cup (B - (H_1 \cap H_2)).$$

那么

$$|H_3| \leq |H_3 \cap H_1| + |H_3 \cap H_2| + |B - (H_1 \cap H_2)|,$$

则

$$|H_1 \cap H_3| \geq |H_3| - |H_3 \cap H_2| - |B - (H_1 \cap H_2)| \geq \frac{n}{4} - \alpha(G) - \alpha(G) - 6\alpha(G) = \frac{n}{4} - 8\alpha(G)$$

同理可得

$$|H_3 \cap H_5| \geq \frac{n}{4} - 8\alpha(G).$$

另一方面, 由

$$|H_3 \setminus H_1| = |H_3| - |H_1 \cap H_3|$$

以及前面的估计, 得到

$$|H_3 \setminus H_1| \leq \left(\frac{n}{4} + 5\alpha(G)\right) - \left(\frac{n}{4} - 8\alpha(G)\right) = 13\alpha(G).$$

从而

$$\begin{aligned} |H_5 \cap H_1| &\geq |H_5 \cap H_1 \cap H_3| = |H_5 \cap H_3| - |H_5 \cap (H_3 \setminus H_1)| \\ &\geq \left(\frac{n}{4} - 8\alpha(G)\right) - 13\alpha(G) = \frac{n}{4} - 21\alpha(G). \end{aligned}$$

由 fact 3.2 知 $\alpha(G) = \alpha n < \nu^3 n < n/84$, 故

$$\frac{n}{4} - 21\alpha(G) > \alpha(G).$$

于是 $H_5 \cap H_1$ 中有多于 $\alpha(G)$ 个顶点, 不可能是独立集, 因此其中存在一条边。这样与边 $v_1 v_5$ 一起便构成一个 K_4 , 矛盾。故 $G[A]$ 不含 C_5 。

下面证明 $G[A]$ 不含 C_7 。假设

$$v_1, v_2, \dots, v_7 \in A$$

满足

$$v_i v_{i+1} \in E(G) \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

仍记

$$H_i = N(v_i) \cap B \quad (1 \leq i \leq 7).$$

由前面对 C_5 情形的同样论证可得

$$|H_3 \setminus H_1| \leq 13\alpha(G), \quad |H_7 \cap H_3| \geq \frac{n}{4} - 21\alpha(G),$$

以及

$$|H_7 \cap (H_3 \setminus H_1)| \leq 13\alpha(G).$$

于是

$$\begin{aligned} |H_7 \cap H_1| &\geq |H_7 \cap H_3 \cap H_1| = |H_7 \cap H_3| - |H_7 \cap (H_3 \setminus H_1)| \\ &\geq \left(\frac{n}{4} - 21\alpha(G)\right) - 13\alpha(G) = \frac{n}{4} - 34\alpha(G). \end{aligned}$$

同样由 fact 3.2 可知

$$\frac{n}{4} - 34\alpha(G) > \alpha(G).$$

因此 $H_7 \cap H_1$ 中有多于 $\alpha(G)$ 个顶点, 不可能是独立集, 于是其中存在一条边。这样便与边 v_1v_7 构成一个 K_4 , 矛盾。

关于 $G[B]$ 不包含 C_5 和 C_7 的证明完全相同。

 事实上, 这么推广的话, $G[A]$ 和 $G[B]$ 都不包含奇圈, 除非奇圈 C_{2m+1} 的 m 足够大。

□

 原文这里只排除了 C_3, C_5, C_7 , 是因为后面调用 lemma 3.12 时已经足够了。不过上面的计算其实还能继续往后推: 每沿奇圈前进两个顶点, 相应邻域与前一个邻域之间至多多损失 $7\alpha(G)$ 个点, 我给出了对于一般奇圈的版本, 具体请见 proposition 4.3。

Lemma 3.12. 若图 F 不含长度为 3, 5, 7 的圈, 则

$$e(F) \leq \alpha(F)^2.$$



 (这个引理来自 [7, Lemma 7.1], 在本论文中没有给出证明, 我补充出证明。)

我们按如下操作取 F 中一系列互不相同的顶点

$$z_1, z_2, \dots, z_k.$$

先令 z_1 是 F 中一个度最大的顶点。若已经选出了

$$z_1, z_2, \dots, z_i,$$

就考虑集合 Q_i , 它由所有与这些顶点的距离都至少为 4 的顶点组成。若 $Q_i = \emptyset$, 就令 $k = i$ 并停止; 否则就在 Q_i 中取一个度最大的顶点作为 z_{i+1} 。

令

$$Q_0 = V(F), \quad W_i = Q_{i-1} \setminus Q_i \quad (1 \leq i \leq k).$$

由于

$$Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq \dots \supseteq Q_k = \emptyset,$$

于是

$$V(F) = W_1 \sqcup W_2 \sqcup \dots \sqcup W_k$$

由 z_i 在 Q_{i-1} 中度最大可知

$$2e(F) = \sum_{x \in V(F)} d(x) \leq \sum_{i=1}^k |W_i| d(z_i).$$

下面我们来说明: 对每个 $i \in [k]$, 集合 W_i 中每个顶点到 z_i 的距离都至多为 3。

事实上, 若 $x \in W_i$, 因为 $x \notin Q_i$, 所以存在某个 $j \leq i$, 使得 x 到 z_j 的距离至多为 3。而若 $j < i$, 则 $x \notin Q_{i-1}$, 这与 $x \in W_i \subseteq Q_{i-1}$ 矛盾。因此只能是 $j = i$ 。

于是 W_i 可分成两部分: 一部分由到 z_i 的距离为 0 或 2 的顶点组成, 另一部分由到 z_i 的距离为 1 或 3 的顶点组成。下面说明 这两部分都是独立集。

若前一部分中有两个相邻顶点 x, y , 那么设

$$\text{dist}(z_i, x) = 2, \quad \text{dist}(z_i, y) = 2$$

时, 沿着从 z_i 到 x, y 的最短路再加上边 xy , 就会得到长度为 5 或 7 的奇圈; 若其中一个顶点就是 z_i , 则得到三角形。类似地, 若后一部分中有两个相邻顶点, 也会得到长度为 3, 5 或 7 的奇圈。这与 F 的假设矛盾。

因此这两部分都是独立集, 从而

$$|W_i| \leq 2\alpha(F) \quad (1 \leq i \leq k).$$

代回前面的估计, 得到

$$e(F) \leq \alpha(F) \sum_{i=1}^k d(z_i).$$

最后, 由构造可知任意两个 z_i, z_j 之间的距离都至少为 4。我们先说明 **这些顶点的邻域两两不交**。若存在某个顶点

$$x \in N(z_i) \cap N(z_j) \quad (i \neq j),$$

那么

$$z_i - x - z_j$$

就是一条长度为 2 的路, 这与 z_i, z_j 之间的距离至少为 4 矛盾。因此

$$N(z_i) \cap N(z_j) = \emptyset \quad (i \neq j).$$

再说明

$$N(z_1) \cup N(z_2) \cup \cdots \cup N(z_k)$$

是一个独立集。若不然, 设其中有一条边 xy 。若 $x, y \in N(z_i)$ 对某个 i 成立, 那么

$$z_i, x, y$$

构成一个三角形, 这与假设矛盾。若 $x \in N(z_i), y \in N(z_j)$ 且 $i \neq j$, 那么

$$z_i - x - y - z_j$$

是一条连接 z_i 和 z_j 的长度为 3 的路, 这同样与 z_i, z_j 之间的距离至少为 4 矛盾。故上述邻域的并确实是独立集。

由于这些邻域两两不交, 便有

$$\sum_{i=1}^k d(z_i) = \sum_{i=1}^k |N(z_i)| = |N(z_1) \cup N(z_2) \cup \cdots \cup N(z_k)|.$$

而上式右边是一个独立集的大小, 所以不超过 $\alpha(F)$ 。于是

$$\sum_{i=1}^k d(z_i) \leq \alpha(F).$$

综上,

$$e(F) \leq \alpha(F) \sum_{i=1}^k d(z_i) \leq \alpha(F)^2.$$

Step 5

把 A 分为

$$A = I_A \cup L_A \cup M_A,$$

把 B 分为

$$B = I_B \cup L_B \cup M_B.$$

其中

$$I_A = \{v \in A : \deg(v, B) > |B|/2 + 4\alpha(G)\},$$

$$L_A = \{v \in A \setminus I_A : (|B| + \alpha(G))/2 < \deg(v, B) \leq |B|/2 + 4\alpha(G)\},$$

$$M_A = A \setminus (I_A \cup L_A),$$

而 I_B, L_B, M_B 的定义与之完全类似。

Claim 3.13. 集合 $I_A \cup L_A$ 在 $G[A]$ 中是独立集, 集合 $I_B \cup L_B$ 在 $G[B]$ 中也是独立集; 此外, I_A 中的顶点在 A 内没有邻点, I_B 中的顶点在 B 内也没有邻点。



Proof. 任取两个不同的顶点

$$u, v \in I_A \cup L_A.$$

由定义可知, 它们在 B 中的度之和满足

$$\deg(u, B) + \deg(v, B) > |B| + \alpha(G).$$

若 $uv \in E(G)$, 在 observation 3.1 取边 uv 与 $S = B$, 则有

$$\deg(u, B) + \deg(v, B) \leq |B| + \alpha(G),$$

矛盾! 因此

$$uv \notin E(G),$$

这说明 $I_A \cup L_A$ 在 $G[A]$ 中是独立集, 同理也有 $I_B \cup L_B$ 在 $G[B]$ 中也是独立集。

 (关于证明 I_A 中的顶点在 A 内没有邻点, 论文中只给了一个简要的思路, 我把整个证明过程补充出来)

由 claim 3.9 可知, A 中每个顶点在 A 内至多有 $\alpha(G)$ 个邻点, 又由 claim 3.10 可知

$$|B| \leq \frac{n}{2} + 3\alpha(G).$$

因此对任意 $v \in A$, 由最小度条件 $\delta(G) \geq n/4$ 得

$$\deg(v, B) \geq \frac{n}{4} - \alpha(G).$$

再由

$$|B| \leq \frac{n}{2} + 3\alpha(G)$$

推出

$$\frac{n}{4} - \alpha(G) > \frac{|B|}{2} - 3\alpha(G).$$

于是若 $u \in I_A$, 则

$$\deg(u, B) > \frac{|B|}{2} + 4\alpha(G).$$

若 u 在 A 中还有某个邻点 v , 则

$$\deg(u, B) + \deg(v, B) > \left(\frac{|B|}{2} + 4\alpha(G) \right) + \left(\frac{|B|}{2} - 3\alpha(G) \right) = |B| + \alpha(G).$$

再对边 uv 与 $S = B$ 用 *observation 3.1*, 可得

$$\deg(u, B) + \deg(v, B) \leq |B| + \alpha(G)$$

矛盾! 因此 u 在 A 中没有邻点。

同理, I_B 中的顶点在 B 内也没有邻点。

□

接下来, 我们进行这样一个操作:

对每个 $v \in L_A$, 删去所有连接 v 与 A 中其他顶点的边, 并加入所有形如

$$vu \quad (u \in B)$$

的边。对 L_B 中的顶点也做同样的操作: 删去其在 B 内部的边, 并加入其与 A 之间的所有边。

对每个 $v \in I_A$, 加入所有形如

$$uv \quad (u \in B)$$

的边。类似地, 对每个 $u \in I_B$, 加入所有形如

$$uv \quad (v \in A)$$

的边。

 注意到, 由于 $G[A]$ 与 $G[B]$ 都不含长度为 3, 5, 7 的圈, 而在上述操作中我们只会从 A 与 B 的内部删边, 所以 $G'[A]$ 与 $G'[B]$ 也仍然不含长度为 3, 5, 7 的圈。

Claim 3.14. 经过上述操作后得到的新图 G' 的总边数不会比原图 G 边数更少, 而且 G' 仍然是 K_4 -free 的。



Proof. 我们先来估计在操作过程中 **删掉的边数**:

对任意 $v \in L_A$, 按定义它在 B 中至多有

$$\frac{|B|}{2} + 4\alpha(G)$$

个邻点, 而在 A 中至多有 $\alpha(G)$ 个邻点, 并且这些 A 中的邻点都属于 M_A 。因此

$$e(G[M_A, L_A]) \leq \alpha(G) |L_A|.$$

同理,

$$e(G[M_B, L_B]) \leq \alpha(G) |L_B|.$$

也就是说, 在整个操作中, 我们至多失去

$$\alpha(G) |L_A| + \alpha(G) |L_B|$$

条内部边。

下面我们来估计 **新加入的边数**。任取 $v \in L_A$ 。由定义, v 在 M_B 中至多有

$$\frac{|B|}{2} + 4\alpha(G)$$

个邻点, 因此我们在 v 处至少加入

$$|M_B| - \left(\frac{|B|}{2} + 4\alpha(G) \right)$$

条新边。又由 *claim 3.13* 我们可知 $I_B \cup L_B$ 是独立集, 故

$$|M_B| = |B| - |I_B| - |L_B| \geq |B| - \alpha(G),$$

于是

$$|M_B| - \left(\frac{|B|}{2} + 4\alpha(G) \right) \geq |B| - \alpha(G) - \left(\frac{|B|}{2} + 4\alpha(G) \right) = \frac{|B|}{2} - 5\alpha(G).$$

因此每个 $v \in L_A$ 至少贡献

$$\frac{|B|}{2} - 5\alpha(G)$$

条新边。同理, 对每个 $v \in L_B$, 至少加入

$$\frac{|A|}{2} - 5\alpha(G)$$

条新边。

所以, 总边数的变化至少为

$$\left(\frac{|B|}{2} - 5\alpha(G) \right) |L_A| + \left(\frac{|A|}{2} - 5\alpha(G) \right) |L_B| - \alpha(G)(|L_A| + |L_B|).$$

也就是

$$\left(\frac{|B|}{2} - 6\alpha(G) \right) |L_A| + \left(\frac{|A|}{2} - 6\alpha(G) \right) |L_B|.$$

再由 *claim 3.10* 得

$$|A|, |B| \geq \frac{n}{2} - 3\alpha(G),$$

从而

$$\frac{|A|}{2} - 6\alpha(G) \geq \frac{n}{4} - \frac{15}{2}\alpha(G), \quad \frac{|B|}{2} - 6\alpha(G) \geq \frac{n}{4} - \frac{15}{2}\alpha(G).$$

结合 *fact 3.2* 中 $\alpha(G) \ll n$, 上面两个系数都为正, 因此总边数变化非负。于是

$$e(G') \geq e(G).$$

下面证明 G' 仍然是 K_4 -free。假设 G' 中存在一个 K_4 。由 *claim 3.13* 我们可知 $I_A \cup L_A$ 和 $I_B \cup L_B$ 都是独立集, 故 K_4 不可能包含上面两个集合的点。

其次, 这个 K_4 也不可能同时包含一个来自 $I_A \cup L_A$ 的顶点和一个来自 $I_B \cup L_B$ 的顶点, 因为在 G' 中, 前者只与 B 中顶点相邻, 后者只与 A 中顶点相邻, 它们不可能再与另外两个顶点一起构成 K_4 。

此外, 由于 $G'[A]$ 与 $G'[B]$ 都不包含 C_3 。因此 K_4 不可能包含任何来自

$$I_A \cup L_A \cup I_B \cup L_B$$

的顶点。

于是唯一剩下的可能是这个 K_4 的四个顶点全部属于

$$M_A \cup M_B.$$

但在 $M_A \cup M_B$ 上, 我们并没有删去或添加边, 又因为任意四个在 $M_A \cup M_B$ 的顶点在原图 G 中不可能构成 K_4 , 矛盾!

因此 G' 仍然是 K_4 -free 的。 □

Claim 3.15. 有

$$e(G'[M_A]) \leq (\alpha(G) - (|I_A| + |L_A|))^2,$$

以及

$$e(G'[M_B]) \leq (\alpha(G) - (|I_B| + |L_B|))^2.$$



Proof. 由 lemma 3.12 以及 claim 3.13 可知, $I_A \cup L_A$ 在 $G'[A]$ 中是独立集, $I_B \cup L_B$ 在 $G'[B]$ 中也是独立集; 并且

$$e(G'[M_A, I_A \cup L_A]) = 0, \quad e(G'[M_B, I_B \cup L_B]) = 0.$$

因此, $G'[M_A]$ 的最大独立集至多有

$$\alpha(G) - |I_A| - |L_A|$$

个顶点; 同理, $G'[M_B]$ 的最大独立集至多有

$$\alpha(G) - |I_B| - |L_B|$$

个顶点。

又由于 $G'[M_A]$ 与 $G'[M_B]$ 仍然都不含长度为 3, 5, 7 的圈, 由 lemma 3.12 我们可得

$$e(G'[M_A]) \leq (\alpha(G) - (|I_A| + |L_A|))^2,$$

以及

$$e(G'[M_B]) \leq (\alpha(G) - (|I_B| + |L_B|))^2.$$

□

有了前面这么多的准备, 我们下面来完成对主定理 *theorem 1.3* 的证明。

theorem 1.3 的证明. 我们记

$$a = |A|, \quad b = |B|, \quad m_A = |M_A|, \quad m_B = |M_B|.$$

由 claim 3.10, 我们设

$$a = \frac{n}{2} + k, \quad b = \frac{n}{2} - k$$

其中

$$0 \leq k \leq 3\alpha(G).$$

定义

$$f_A(x) = x \cdot \frac{b + \alpha(G)}{2} + (a - x)b + 2(\alpha(G) - (a - x))^2,$$

$$f_B(x) = x \cdot \frac{a + \alpha(G)}{2} + (b - x)a + 2(\alpha(G) - (b - x))^2.$$

我们断言

$$\sum_{v \in A} d_{G'}(v) \leq f_A(m_A).$$

 (论文中关于这个结论一笔带过, 我补充出证明)

M_A 中每个顶点在 B 中至多有

$$\frac{|B| + \alpha(G)}{2} = \frac{b + \alpha(G)}{2}$$

个邻点; 而 $A \setminus M_A = I_A \cup L_A$ 中的每个顶点在 G' 中都与 B 的所有顶点相邻, 所以这部分对 A 中度数和的贡献至多为

$$(a - m_A)b.$$

此外, A 内部的边只可能出现在 M_A 中, 并且由 *claim 3.15* 有

$$e(G'[M_A]) \leq (\alpha(G) - (a - m_A))^2.$$

因此这些内部边对 A 中度数和的贡献至多为

$$2(\alpha(G) - (a - m_A))^2.$$

合并即得

$$\sum_{v \in A} d_{G'}(v) \leq f_A(m_A).$$

同理

$$\sum_{u \in B} d_{G'}(u) \leq f_B(m_B).$$

于是

$$2e(G') \leq f_A(m_A) + f_B(m_B).$$

另一方面, 由 *claim 3.13* 可知 $I_A \cup L_A$ 与 $I_B \cup L_B$ 都是独立集, 因此

$$|I_A| + |L_A| \leq \alpha(G), \quad |I_B| + |L_B| \leq \alpha(G).$$

于是

$$m_A \geq a - \alpha(G), \quad m_B \geq b - \alpha(G).$$

下面我们说明 f_A 与 f_B 在相应区间上都是单调递减的. 对 f_A 求导,

$$f'_A(x) = \frac{\alpha(G) - b}{2} + 4(\alpha(G) - a + x).$$

由 $b \geq n/2 - 3\alpha(G)$ 以及 $\alpha(G) \ll n$, 我们可知当 $a - \alpha(G) \leq x \leq a$ 时,

$$f'_A(x) \leq \frac{\alpha(G) - b}{2} + 4\alpha(G) = \frac{9\alpha(G) - b}{2} < 0,$$

因此 f_A 在 $[a - \alpha(G), a]$ 上单调递减, 同理 f_B 在 $[b - \alpha(G), b]$ 上也单调递减.

所以

$$f_A(m_A) \leq f_A(a - \alpha(G)), \quad f_B(m_B) \leq f_B(b - \alpha(G)).$$

代入可得

$$\begin{aligned} f_A(a - \alpha(G)) &= (a - \alpha(G)) \frac{b + \alpha(G)}{2} + \alpha(G)b, \\ f_B(b - \alpha(G)) &= (b - \alpha(G)) \frac{a + \alpha(G)}{2} + \alpha(G)a. \end{aligned}$$

即

$$f_A(a - \alpha(G)) = f_B(b - \alpha(G)) = \frac{ab + \alpha(G)n - \alpha(G)^2}{2}.$$

从而

$$2e(G') \leq ab + \alpha(G)n - \alpha(G)^2.$$

再由 claim 3.14 知

$$e(G) \leq e(G'),$$

故

$$2e(G) \leq ab + \alpha(G)n - \alpha(G)^2.$$

又因为

$$ab = \left(\frac{n}{2} + k\right) \left(\frac{n}{2} - k\right) = \frac{n^2}{4} - k^2,$$

所以

$$e(G) \leq \frac{n^2}{8} + \frac{\alpha(G)n}{2} - \frac{\alpha(G)^2}{2} - \frac{k^2}{2} \leq \frac{n^2}{8} + \frac{\alpha(G)n}{2} - \frac{\alpha(G)^2}{2}.$$

而主定理的条件是

$$e(G) > \frac{n^2 + n}{8} + \frac{\alpha(G)n - \alpha(G)^2}{2},$$

矛盾! 这表明从一开始我们关于 G 中包含 K_4 的假设是错的, 即 G 中不包含 K_4 。 □

4 改进

回到我们最初的问题, 就是为什么取的是 $\nu = 1/500$?

Proposition 4.1. 沿用原文的整体证明框架, 并保持

$$\gamma = \exp\left(-\frac{10 \log(1/\nu)}{\nu}\right), \quad N = \exp\left(\frac{10 \log(1/\nu)}{\nu}\right),$$

只要 $0 < \nu < 1/321$, 则正文中从 **Step 1** 到 **Step 5** 的论证仍然可以完成。也就是说, 把原文中的 $\nu = 1/500$ 换成任意 $\nu < 1/321$ 仍然足够。



Proof. 我们只需关注具体用的这个 ν 的范围的地方:

先看 **Step 3**。对每个 $v \in A_2$, 由 claim 3.4 可知

$$\deg(v, V \setminus A_2) \geq \frac{n}{4} - \nu|A_1|.$$

将 lemma 2.5 应用于二部图 $G[A_2, V \setminus A_2]$ 后, 对每个 $v \in A'_2$, 有

$$\deg(v, B_2) \geq \frac{n}{4} - \nu|A_1| - 2\nu|V \setminus A_2|.$$

注意到

$$|V \setminus A_2| = n - |A_2|, \quad |A_2| > (1 - \nu)|A_1|,$$

所以

$$\begin{aligned}\nu|A_1| + 2\nu|V \setminus A_2| &= \nu|A_1| + 2\nu(n - |A_2|) \\ &= 2\nu n + \nu(|A_1| - 2|A_2|) \\ &< 2\nu n,\end{aligned}$$

因为

$$|A_1| - 2|A_2| < |A_1| - 2(1 - \nu)|A_1| = (2\nu - 1)|A_1| < 0.$$

于是对每个 $v \in A'_2$, 都有

$$\deg(v, B_2) > \frac{n}{4} - 2\nu n.$$

再像原文那样在 A'_2 中取一条边 uv , 由

$$\deg(u, B_2) + \deg(v, B_2) \leq |B_2| + \alpha(G)$$

得到

$$|B_2| > \frac{n}{2} - 4\nu n - \alpha(G).$$

接着由 B_3 的定义和 ν^+ -regular 性,

$$|B_3| \geq (1 - \nu)|B_2| > |B_2| - \nu n > \frac{n}{2} - 5\nu n - \alpha(G).$$

另一方面, **Step 2** 里已经有

$$|A_2| \geq \frac{n}{2} - 7\nu n - \alpha(G).$$

因此

$$|V \setminus (A_2 \cup B_3)| = n - |A_2| - |B_3| < 12\nu n + 2\alpha(G).$$

由于 $\alpha(G) < \nu^3 n$, 上式进一步给出

$$|V \setminus (A_2 \cup B_3)| < (12\nu + 2\nu^3)n.$$

现在回到 observation 3.6。对任意 $x \in V \setminus (A_2 \cup B_3)$, 由最小度条件 $\delta(G) \geq n/4$ 得

$$\deg(x, A_2) + \deg(x, B_3) > \frac{n}{4} - (12\nu + 2\nu^3)n.$$

若 $x \in A'$, 则 $\deg(x, B_3) \geq \deg(x, A_2)$, 从而

$$\deg(x, B_3) > \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3\right)n.$$

同理, 若 $x \in B'$, 则

$$\deg(x, A_2) > \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3\right)n.$$

接下来我们来看 claim 3.7。设 $u_1 u_2$ 是 $A \setminus A' = A_2$ 中的一条边。由 $\deg(u_i, A_2) \leq \nu|A_1| < \nu n$ 以及

$$|A'| \leq |V \setminus (A_2 \cup B_3)| < 12\nu n + 2\alpha(G),$$

可得

$$\deg(u_i, A) < 13\nu n + 2\alpha(G).$$

于是

$$\deg(u_i, B) > \frac{n}{4} - 13\nu n - 2\alpha(G).$$

再利用

$$|N(u_1) \cap N(u_2)| \leq \alpha(G),$$

可得

$$|(N(u_1) \cup N(u_2)) \cap B| > \frac{n}{2} - 26\nu n - 5\alpha(G).$$

同时由

$$|B| \leq \frac{n}{2} + 7\nu n + \alpha(G)$$

得到

$$|B \setminus (N(u_1) \cup N(u_2))| < 33\nu n + 6\alpha(G).$$

现在对任意 $v \in A$ ，都有

$$|N(v) \cap B| > \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3\right)n.$$

若同时有

$$|N(v) \cap N(u_1) \cap B| \leq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3\right)n - (33\nu n + 6\alpha(G)) \right)$$

和

$$|N(v) \cap N(u_2) \cap B| \leq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3\right)n - (33\nu n + 6\alpha(G)) \right),$$

那么就会推出

$$|N(v) \cap B| < \left(\frac{1}{8} - 6\nu - \nu^3\right)n,$$

矛盾。因此至少有一个交集满足

$$|N(v) \cap N(u_i) \cap B| > \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{8} - 39\nu - \nu^3\right)n - 6\alpha(G) \right).$$

只要右端大于 $\alpha(G)$ ，claim 3.7 的原论证就仍然成立。由 $\alpha(G) < \nu^3 n$ ，只需验证

$$\frac{1}{8} - 39\nu - 9\nu^3 > 0.$$

解出来大概是 $\nu < 1/321$ ，也就是说，当 $\nu < 1/321$ 时 claim 3.7 仍然成立。

一旦 claim 3.7 保持成立，后面的 corollary 3.8 和 claim 3.9 也可以用同样的方法继续推进。事实上，此时

$$\deg(v, A) < 13\nu n + 3\alpha(G),$$

是满足的。最后 **Step 5** 里涉及 $|A|, |B|$ 的估计本来就只有 $O(\alpha(G))$ 量级，对 ν 的选取也没有影响。

所以实际上我们取 $\nu < 1/321$ 也是能按照原文的思路完成证明的。□

下面我们给出一个比 lemma 2.5 更强的参数化版本。相比 lemma 2.5，我们引入了一个新参数进行推广，得到了一个更精细的下界。

Proposition 4.2. 设 F 是二部图，二部划分为 (A, B) ，其中

$$|A| = a, \quad |B| = b.$$

假设每个 $x \in A$ 在 B 中至少有 δb 个邻点。取参数

$$1 < t < \frac{\delta}{\varepsilon},$$



并假设 $0 < \varepsilon < 1$ 。那么存在 $X \subseteq A$ 、 $Y \subseteq B$ ，使得 $F[X, Y]$ 是 ε^+ -regular pair，并且

$$|Y| \geq \frac{\delta - t\varepsilon}{1 - t\varepsilon} b,$$

同时

$$\deg(x, Y) \geq \frac{\delta - t\varepsilon}{1 - t\varepsilon} b \quad \forall x \in X,$$

而且

$$|X| \geq \exp\left(-\frac{\log \frac{1}{\varepsilon(1-1/t)} \cdot \log \frac{1-t\varepsilon}{\delta-t\varepsilon}}{\log \frac{1}{1-\varepsilon}}\right) a.$$



Proof. 我们沿用 lemma 2.5 的迭代思想，把 2ε 改成 $t\varepsilon$ 。

从

$$X_0 = A, \quad Y_0 = B$$

开始。若 $F[X_i, Y_i]$ 已经是 ε^+ -regular pair，则停止。

否则，存在

$$S \subseteq X_i, \quad T \subseteq Y_i$$

满足

$$|S| \geq \varepsilon |X_i|, \quad |T| \geq \varepsilon |Y_i|,$$

且

$$d(S, T) < \varepsilon.$$

由 claim 2.4，可以取

$$X'_{i+1} \subseteq S, \quad Y'_{i+1} \subseteq T$$

满足

$$|X'_{i+1}| = \varepsilon |X_i|, \quad |Y'_{i+1}| = \varepsilon |Y_i|,$$

并且

$$e(X'_{i+1}, Y'_{i+1}) < \varepsilon |X'_{i+1}| |Y'_{i+1}|.$$

令

$$Z_{i+1} = \{x \in X'_{i+1} : \deg(x, Y'_{i+1}) > t\varepsilon |Y'_{i+1}|\}.$$

因为总边数小于

$$\varepsilon |X'_{i+1}| |Y'_{i+1}|,$$

所以

$$|Z_{i+1}| < \frac{1}{t} |X'_{i+1}|.$$

令

$$X_{i+1} = X'_{i+1} \setminus Z_{i+1}, \quad Y_{i+1} = Y_i \setminus Y'_{i+1}.$$

则

$$|X_{i+1}| \geq \left(1 - \frac{1}{t}\right) |X'_{i+1}| = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{t}\right) |X_i|,$$

并且

$$|Y_{i+1}| = (1 - \varepsilon) |Y_i|.$$

所以若迭代进行了 l 步，则

$$|X_l| \geq \left(\varepsilon \left(1 - \frac{1}{t} \right) \right)^l a,$$

$$|Y_l| = (1 - \varepsilon)^l b.$$

接下来估计 l 。在每一步中，保留下来的 $x \in X_{i+1}$ 对被删掉的 Y'_{i+1} 的邻点数至多

$$t\varepsilon|Y'_{i+1}|.$$

因此对任意 $x \in X_l$ ，它在所有被删去的 Y -块中的邻点总数至多

$$t\varepsilon \sum_{j=1}^l |Y'_j| = t\varepsilon(b - |Y_l|).$$

由于一开始

$$\deg(x, B) \geq \delta b,$$

所以

$$\deg(x, Y_l) \geq \delta b - t\varepsilon(b - |Y_l|) = (\delta - t\varepsilon)b + t\varepsilon|Y_l|.$$

但是

$$\deg(x, Y_l) \leq |Y_l|.$$

因此

$$|Y_l| \geq (\delta - t\varepsilon)b + t\varepsilon|Y_l|.$$

故

$$|Y_l| \geq \frac{\delta - t\varepsilon}{1 - t\varepsilon} b.$$

又因为

$$|Y_l| = (1 - \varepsilon)^l b,$$

所以

$$(1 - \varepsilon)^l \geq \frac{\delta - t\varepsilon}{1 - t\varepsilon}.$$

取对数后可得

$$l \leq \frac{\log \frac{1-t\varepsilon}{\delta-t\varepsilon}}{\log \frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

代回对 X_l 的估计：

$$|X_l| \geq \left(\varepsilon \left(1 - \frac{1}{t} \right) \right)^l a.$$

由于

$$0 < \varepsilon \left(1 - \frac{1}{t} \right) < 1,$$

于是

$$|X_l| \geq \exp \left(- \frac{\log \frac{1}{\varepsilon(1-1/t)} \cdot \log \frac{1-t\varepsilon}{\delta-t\varepsilon}}{\log \frac{1}{1-\varepsilon}} \right) a.$$

如果过程停止，则得到的就是 ε^+ -regular pair。若过程一直不停止，那么 Y_l 会持续按 $(1 - \varepsilon)^l$ 缩小，最终也会与刚才推出的必要条件

$$|Y_l| \geq \frac{\delta - t\varepsilon}{1 - t\varepsilon} b.$$

相矛盾！所以过程必定在某一步停止，命题得证。 $\square$

Proposition 4.3. 设 G 是一个 K_4 -free 图, 满足 $\delta(G) \geq n/4$, 并且存在划分 $V(G) = A \cup B$ 满足 claim 3.9 与 claim 3.10 的结论。若 $r \geq 1$ 且

$$(28r + 8)\alpha(G) < n,$$

则 $G[A]$ 与 $G[B]$ 都不含长度为 $2r + 1$ 的圈。



Proof. 我们只证明 $G[A]$ 的情形。假设

$$v_1 v_2 \cdots v_{2r+1} v_1$$

是 $G[A]$ 中的一个圈, 并记

$$H_i := N(v_i) \cap B.$$

由 claim 3.9 与最小度条件可知

$$|H_i| \geq \frac{n}{4} - \alpha(G).$$

又由 claim 3.10,

$$|B| \leq \frac{n}{2} + 3\alpha(G).$$

对任意相邻的 v_i, v_{i+1} , 集合 $H_i \cap H_{i+1}$ 必须是独立集, 否则其中一条边会与 $v_i v_{i+1}$ 构成 K_4 。因此

$$|H_i \cap H_{i+1}| \leq \alpha(G).$$

从而

$$\begin{aligned} |B \setminus (H_i \cup H_{i+1})| &= |B| - |H_i| - |H_{i+1}| + |H_i \cap H_{i+1}| \\ &\leq 6\alpha(G). \end{aligned}$$

于是

$$H_{i+2} \setminus H_i \subseteq (H_{i+2} \cap H_{i+1}) \cup (B \setminus (H_i \cup H_{i+1})),$$

故

$$|H_{i+2} \setminus H_i| \leq 7\alpha(G).$$

将这个不等式沿奇数下标迭代 r 次, 得到

$$|H_{2r+1} \setminus H_1| \leq 7r\alpha(G).$$

所以

$$|H_{2r+1} \cap H_1| \geq |H_{2r+1}| - |H_{2r+1} \setminus H_1| \geq \frac{n}{4} - (7r + 1)\alpha(G).$$

由 $(28r + 8)\alpha(G) < n$ 可知右端严格大于 $\alpha(G)$ 。但 $v_1 v_{2r+1} \in E(G)$, 因此 $H_1 \cap H_{2r+1}$ 必须是独立集, 大小至多为 $\alpha(G)$, 矛盾。

$G[B]$ 的证明完全相同。

□

参考文献

- [1] J. Balogh, C. Chen, G. McCourt, and C. Murley, Ramsey–Turán problems with small independence numbers, *European Journal of Combinatorics*, 118 (2024), 103872.
- [2] B. Bollobás and P. Erdős, On a Ramsey–Turán type problem, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 21 (1976), 166–168.
- [3] B. Csaba, On the Ramsey–Turán problem for 4-cliques, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 39 (2025), 1201–1212.
- [4] J. Fox, P. Loh, and Y. Zhao, The critical window for the classical Ramsey–Turán problem, *Combinatorica*, 35 (2015), 435–476.
- [5] J. Gao, S. Jiang, H. Liu, and M. Sankar, Generalized Ramsey–Turán density for cliques, *Forum of Mathematics, Sigma*, 13 (2025), e78.
- [6] H. Liu, C. Reiher, M. Sharifzadeh, and K. Staden, Geometric constructions for Ramsey–Turán theory, *Journal of the European Mathematical Society*, 28 (2026), no. 1, 79–112.
- [7] C. M. Lüders and C. Reiher, The Ramsey–Turán problem for cliques, *Israel Journal of Mathematics*, 230 (2019), 613–652.
- [8] M. Simonovits and V. T. Sós, Ramsey–Turán theory, *Discrete Mathematics*, 229 (2001), 293–340.
- [9] V. T. Sós, On extremal problems in graph theory, in *Proceedings of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and Their Applications*, 1969, 407–410.
- [10] E. Szemerédi, On graphs containing no complete subgraph with 4 vertices, *Matematikai Lapok*, 23 (1972), 113–116.
- [11] E. Szemerédi, Regular partitions of graphs, in *Colloques Internationaux C.N.R.S. No. 260 – Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes*, 1976, 399–401.